Desarrollo y Sociedad Nos. 15 y 16 – Septiembre de 1984, Marzo de 1985 – CEDE, Uniandes

Modelo de Crecimiento y Decrecimiento en el Tiempo, del "Espacio Construido", en un Barrio como Ciudad Kennedy

Luis Jorge Ferro

Luis Jorge Ferro C., Licenciado en Ciencias Naturales (Mención Física y Matemáticas), Diploma de Matemático, D.H.E.C., Universidad de Lausana – Suiza. Profesor, Departamento de Matemáticas, Universidad de los Andes.

Modelo de Crecimiento y Decrecimiento en el Tiempo, del "Espacio Construido", en un Barrio como Ciudad Kennedy

Luis Jorge Ferro

Las situaciones derivadas de los procesos de construcción y utilización de la ciudad colombiana son múltiples y complejas y, desde el punto de vista del conocimiento, son escasamente identificadas y analizadas. La participación de la población como agente en la producción de la vivienda y como usuario de ella en forma simultánea, fija un acentuado dinamismo que particulariza tales procesos de construcción y modifica los patrones convencionales de aprovechamiento de los espacios construidos. La experiencia más tangible se tiene en Ciudad Kennedy, donde el adjudicatario actuando como pequeño empresario contribuyó a la reducción del déficit de vivienda, pues cada propietario llevó a cabo un proceso de ampliación, mejoramiento, subdivisión, cambio de uso y creación de vivienda, cuyo resultado fue la obtención de mejoras cualitativas del espacio construido y de su utilización[1].

En efecto, el estudio sobre el cual se hará el modelo[2], contiene un análisis de la vivienda compartida considerada dentro de la dinámica urbana que la envuelve, contexto donde pueden apreciarse los cambios y evolución de sus características y que permite establecer y diferenciar dos procesos básicos: en primer término, desde la época de construcción y adjudicación de las viviendas, comenzó un proceso permanente de ampliación y modificación de los espacios construidos, caracterizado como un proceso de reproducción del espacio y operado por los propietarios sobre el "stock" de espacio inicialmente construido por el Instituto de Crédito Territorial (ICT). En segundo término, los propietarios, una vez ocupadas las viviendas, inician un proceso de utilización o consumo de éstas diferente al previsto por el ICT. Los moradores realizan aprovechamientos diversos de los recintos priva-

[1] REVEIZ, Edgar, "Estado, Constructores y Pequeños Empresarios: Un pacto para la Multiplicación de la vivienda de la clase media en *Desarrollo y Sociedad*, Bogotá, CEDE, Cuaderno 4, Noviembre de 1982.

[2] REVEIZ, E.; TRIANA, L.A.; SALAZAR, J.M., "Estudio sobre la vivienda compartida en Ciudad Kennedy". Documento del Centro de Estudios sobre Desarrollo Económico, CEDE, U. Andes, 1979.

dos (de la vivienda) de acuerdo a sus condiciones socioeconómicas y a sus patrones de uso del espacio. Este segundo proceso se ha llamado de diversificación de las formas de consumo del espacio, el cual comprende las modalidades de alojamiento: unifamiliar, bifamiliar y compartido. Estas modalidades de alojamiento constituyen *situaciones de consumo* del espacio habitable.

El nivel de vida de los habitantes cambia paulatinamente; en conjunto, se aprecia un mejoramiento en la calidad de la vivienda: modelar este fenómeno es el objetivo en este artículo.

I. Objetivo del trabajo

Modelar el proceso de transformación de las situaciones de vivienda por crecimiento y decrecimiento del "espacio construido" en un barrio de las características de *Ciudad Kennedy*. Para tal efecto se utiliza la teoría de las Cadenas de Markov, que representa un método sencillo, completo y conciso para tratar esta clase de problemas y que, en este caso, sirve para analizar las variaciones del consumo cualitativo de espacio por persona, teniendo en cuenta los efectos de crecimiento del área construida y de la población.

II. Presentación del problema

Se dispone de dos conjuntos de datos estadísticos correspondientes a dos períodos de tiempo separados entre sí 15 años. El primer conjunto de datos se refiere a la situación inicial de Ciudad Kennedy, en la época de la construcción y adjudicación de las viviendas por parte del Instituto de Crédito Territorial (ICT); y el segundo conjunto de datos 15 años después del primero a un tiempo final para propósitos de este estudio.

La información está contenida en 198 encuestas, levantamiento efectuado por el CEDE para el estudio "VIVIENDA COMPARTIDA EN ARRENDAMIENTO EN CIUDAD KENNEDY; TERCERA ETAPA", realizado por los profesores Edgar Reveiz, Luis Alfonso Triana y Juan Manuel Salazar.

Cada entrada, en el conjunto de datos, corresponde al registro de información de cada una de las casas de la muestra seleccionada.

Para cada casa X y para cada tiempo (t_o = tiempo inicial, t_f = tiempo final) se tiene:

N: Número total de personas que la habitan

Gráfico No. 1

FORMATO DE LOS VALORES TOMADOS DE LAS ENCUESTAS

CASA	Información 1 Tiempo inicial t_o			Información 2 Tiempo final t_f		
	N	A	FC	N	A	FC
Casa 1						
Casa 2						
Casa 3						
. . .						
Casa 198						

A: Area total construida

FC: Factor de calidad. Este es un número entre 0 y 1 obtenido de acuerdo con la organización, terminación y acabados de los espacios de la casa.

Así, para cada casa se tiene la variación de estos valores en los 15 años, lo que refleja el cambio del consumo de vivienda.

III. Modelo matemático

A. Consumo de metros cuadrados por persona

Se define el consumo de metros cuadrados por persona para una casa X como el área de X por su factor de calidad correspondiente, dividido por el número de personas que la habitan:

$$C = \frac{A \times FC}{N}$$

La unidad que mide el consumo es la UNIDAD FUNCIONAL DE CONSUMO POR PERSONA (UF/p), que considera el área ponderada por persona, de manera que si una persona consume 1 U.F. significa que consume 1 m^2 con factor de calidad de 1.

B. Los estados

El consumo indica el nivel de aprovechamiento de la casa en cuanto a calidad de alojamiento. Así para cada casa X se tiene Ct_o (consumo en el tiempo inicial) y Ct_f (consumo en el tiempo final). Ahora, con el fin de volver discretos los valores, se determinan los estados del sistema como intervalos semiabiertos [a, b) del consumo por persona. Graficando la frecuencia de distribución de consumo de acuerdo con los datos, se divide el espacio en intervalos semiabiertos llamados estados, de manera que cada estado tenga una longitud semejante con respecto a los demás, que en cada uno haya un número adecuado de habitantes y que los cortes no sean arbitrarios.

Realizando este ejercicio (Gráfico No. 2) se hallan 9 intervalos apropiados de corte en la línea de consumo, de acuerdo con el valor en UF/p.

E_1: [0.0, 4.0)

E_2: [4.0, 6.5)

E_3: [6.5, 8.40)

E_4: [8.4, 10.0)

E_5: [10.0, 12.7)

E_6: [12.7, 15.4)

E_7: [15.4, 19.5)

E_8: [19.5, 26.7)

E_9: [26.7, 00)

Si en una casa X se consumen CUF/p y dicho valor está en E_i entonces se dice que X está en el estado i, para i = 1, 2, 3, ..., 9.

Así, los habitantes iniciales y finales se distribuyen en 9 *estados de consumo* de alojamiento. Como existen habitantes que entran a un estado sin conocerse su procedencia (nacimientos, inmigración al barrio, cambios de residencia dentro del barrio), y otros que salen de un estado sin conocer su destino (muertes, emigraciones del barrio y cambios de residencia internos), se necesita de un décimo estado ficticio, denotado E_F, que representa las situaciones indefinidas de las personas que tienen alguna relación con el barrio por vivir, o haber vivido en él, o que desean entrar a él. En realidad E_F es el estado que relaciona el sistema con el exterior, ya que a través de éste se realizan las entradas y salidas en el barrio.

C. Cadenas de Markov

Para fundamentar teóricamente el uso de las Cadenas de Markov en este

Gráfico No. 2

ESTADOS DE CONSUMO. DATOS INICIALES

$t = 0$ AÑOS

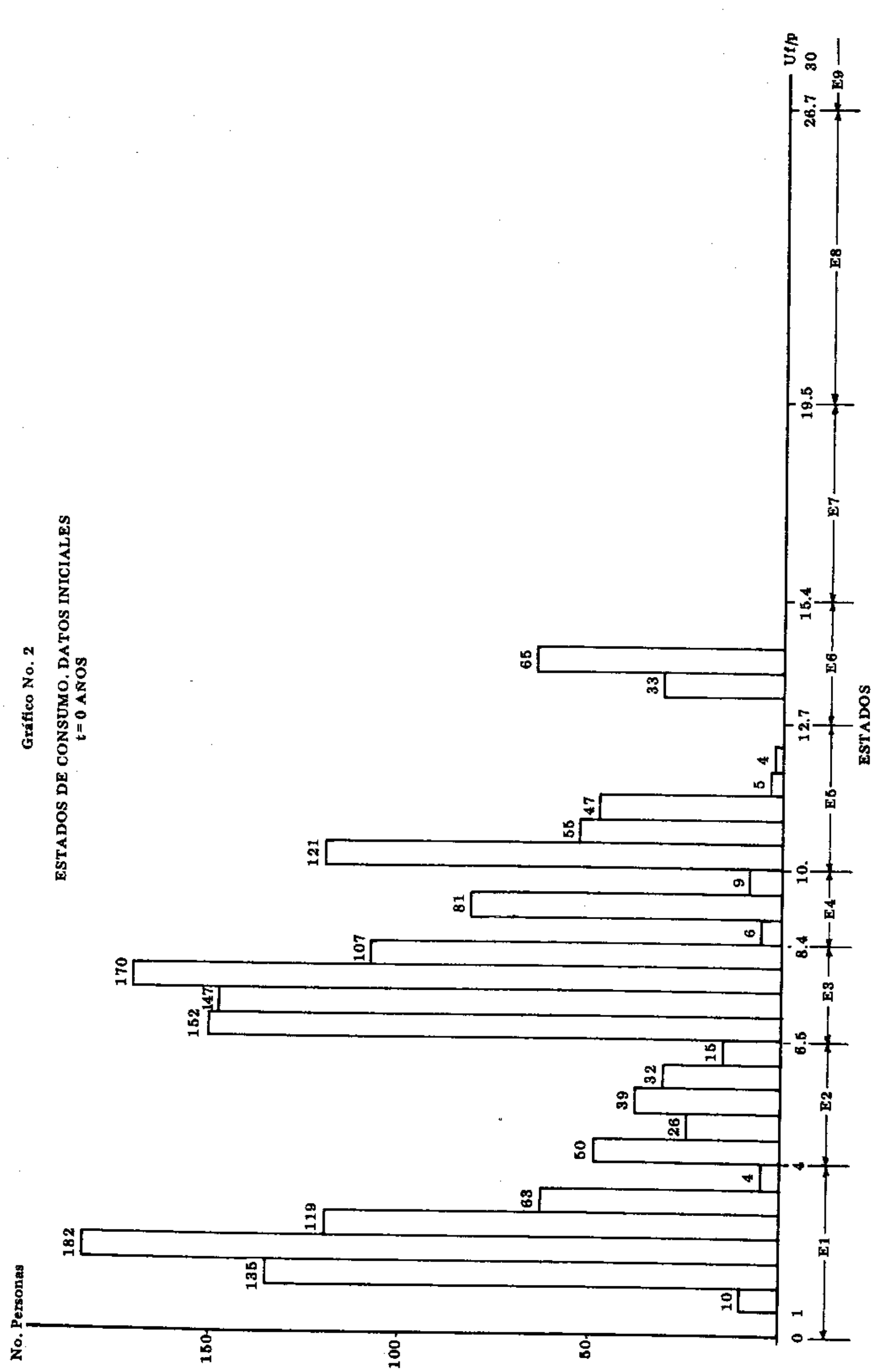
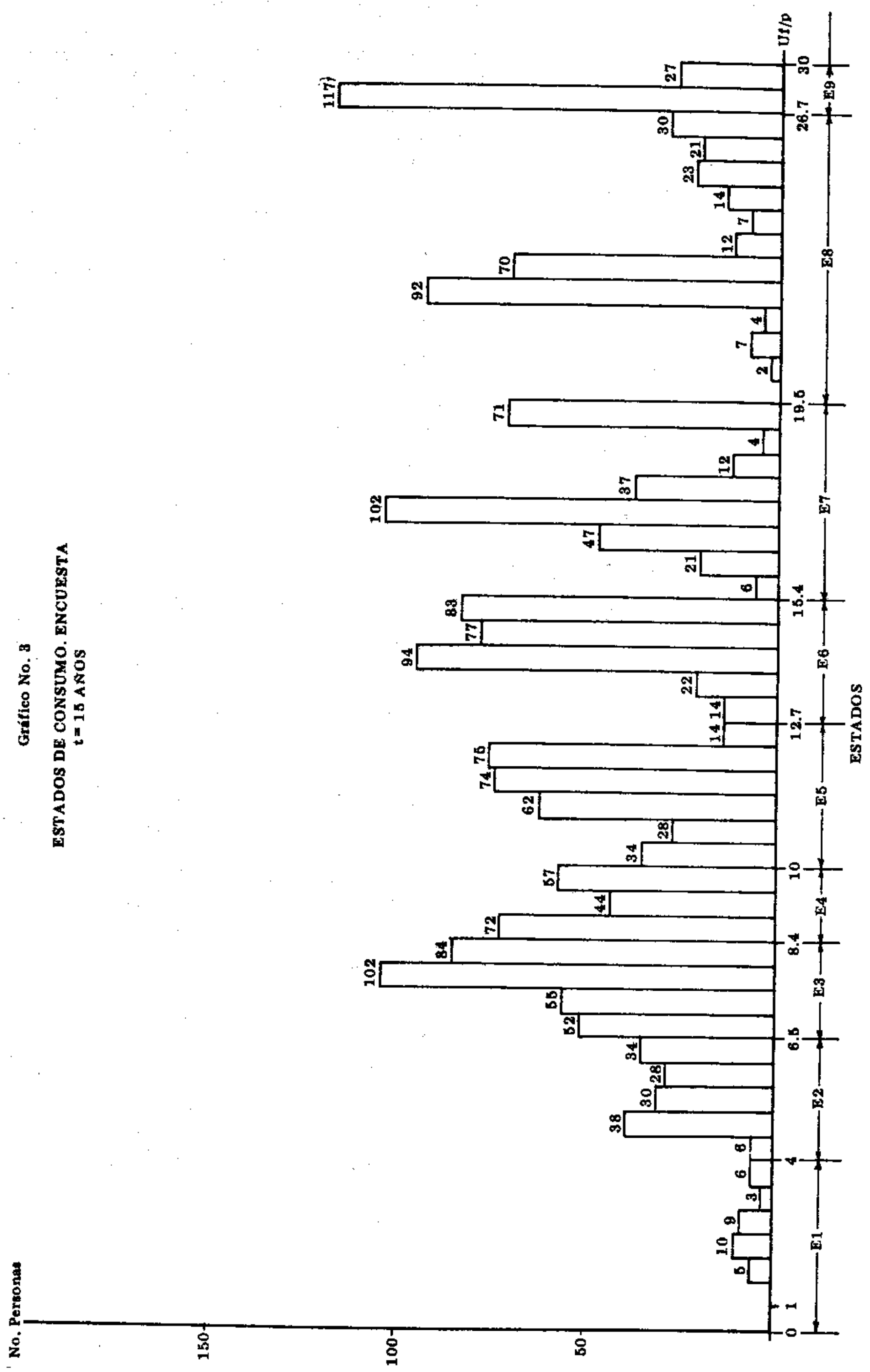


Gráfico No. 3

ESTADOS DE CONSUMO. ENCUESTA

t = 15 AÑOS



problema, se recuerda que la hipótesis básica de estos modelos es que el futuro solo depende del pasado inmediato y no de toda la historia anterior, lo que resulta adecuado en este caso.

Se considera un sistema mediante el cual un objeto dado puede ocupar uno cualquiera de k estados posibles durante un intervalo de tiempo de duración fija, de manera que al final de dicho período se encuentra en otro cualquiera de los k estados considerados con la posibilidad de que no haya cambio, es decir de que permanezca en el mismo estado. En la literatura al respecto, esto es descrito como un proceso de estados discretos con transiciones discretas. En una Cadena de Markov, los estados por los cuales pasa el mencionado objeto en s períodos de tiempo, forman una sucesión de variables aleatorias expresadas en X_o, X_1, X_2, X_3, ..., X_{s-1}. La variable aleatoria X_j expresa el estado ocupado en el período j.

Estas variables aleatorias están relacionadas por medio de probabilidades de transición, que dependen del último estado ocupado y del próximo futuro únicamente, así:

$$P\,[X_{n+1} = j \mid X_n = i]$$
$$= P(i, j) = P\,[X_1 = j \mid X_o = i]$$

que se lee, "La probabilidad de que el objeto ocupe el estado j en el instante n + 1, dado que en el instante n ocupaba el estado i es P (i, j), que es igual a la probabilidad de que ocupe el estado j en el instante 1, dado que en el instante 0 estaba en el estado i".

Para establecer el modelo matemático se necesitan tres partes: los estados (que ya fueron identificados), la matriz de Markov (que cuantifica la forma como se efectúan las transiciones entre estados) y por último la distribución inicial del sistema.

D. La matriz de Markov

Tenemos como entrada una lista de casas, cada una con un número inicial de habitantes y un estado inicial, y un número final de habitantes y un estado final.

Gráfico No. 4

Casas	Tiempo inicial		Tiempo final	
	N	E	N	E
Casa 1	9	2	5	3
Casa 2	4	3	5	4
Casa 3				
... ...				
Casa 198				

Decimos, por ejemplo, que en la casa 1, del Gráfico No. 4, había 9 personas en el estado de consumo 2 y, 15 años después, 5 personas (no necesariamente las mismas, pero sí en la misma casa) estaban en el estado 3. Esto lo interpretamos diciendo que hubo una transición de 5 personas de E_2 a E_3 y una transición de 4 personas de E_2 a E_f o sea, pasaron a una situación que es desconocida para nosotros, como pudo ser salir del sistema. En la casa 2, 4 personas hicieron una transición de E_3 a E_4 y 1 persona sufrió una transición de E_f a E_4 o sea, llegó sin saber su origen.

Una persona puede modificar su situación presente cambiando la cantidad de espacio que consume. Este hecho se modela como una transición a un nuevo estado. La toma de esta decisión tiene un carácter aleatorio debido al gran número de individuos que participan y a la complejidad de las circunstancias que la rodean. Por lo tanto, se representa mediante la noción de probabilidad de transición.

La construcción de la matriz T de transición se hace de la siguiente forma: Iniciando T con cero en todas las 10 x 10 posiciones, para cada casa se procede así:

1. Se fija el estado inicial de clasificación de la casa, esto es i.

2. Se fija el estado final, esto es j.

3. Se pueden presentar 3 casos:

   a. El número final coincide con el número inicial de personas en la casa (N):

   $$T\ [i, j]\ + N \rightarrow T\ [i, j]$$

   significa agregar el valor N a T[i, j].

   b. Si el número de personas al final (N_f) es inferior al número de personas al inicio (N_i)

   $$T\ [i, j]\ +\ N_f \rightarrow T\ [i, j]$$

   $$T\ [i, F]\ +\ (N_i - N_f) \rightarrow T\ [i, F]$$

   F es 10 en este caso.

   c. El número de personas al final (N_f) es superior al número inicial (N_i)

   $$T\ [i, j]\ +\ N_i \rightarrow T\ [i, j];$$

   $$T\ [F, j]\ +\ (N_f - N_i) \rightarrow T\ [(F, j)]$$

   o sea, llegaron personas que no conocemos su origen.

Luego se prosigue con la siguiente casa.

Este es realmente el simple algoritmo para construir la matriz T. El resultado final se resume en el cuadro No. 1.

La columna *total renglón* corresponde a la suma de todos los habitantes que partieron del estado i, es decir, el número inicial de personas en el estado i.

La matriz puede ser interpretada de la siguiente manera: por ejemplo, en la posición T [5, 7] está el valor 73. Esto significa que 73 personas cambiaron su consumo de U.F./persona de un valor en t_o comprendido en el estado quinto, a un valor que queda incluido en el séptimo estado en t_f.

En este punto existe un problema: los renglones 7, 8 y 9 tienen valores cero, lo que hace que el modelo no funcione, por razones que se verán adelante.

El hecho de que los renglones 7, 8 y 9 aparezcan en blanco significa exactamente que en el barrio de Ciudad Kennedy no existían casas de tamaño y calidad suficientes que permitieran

Cuadro No. 1

MATRIZ T DE TRANSICION

Estados en t_o \ Estados en t_f	1	2	3	4	5	6	7	8	9	F	Total renglón
1	18	42	78	55	80	33	51	18	10	128	513
2			25	27	38	38	5		4	25	162
3	9	18	54	54	54	83	38	89	40	137	576
4		7		15		36		16	5	17	96
5			9		25	21	73	39	28	44	239
6			7		17		14	17	20	23	98
7											
8											
9											
F	6	69	68	49	116	93	119	103	37	1.000	1.660

considerar, en el tiempo inicial, a ciertas personas en el nivel de consumo alto de los estados 7, 8 y 9. Es decir, del estudio se deduce que el barrio globalmente no era de consumo alto de espacio por persona en t_o. En el t_f, 15 años después, aparecen estos niveles, y por tanto, personas en estos estados de mayor consumo. El modelo matemático no permite renglones nulos, por lo que se debe hacer alguna suposición suplementaria.

Se presentan las siguientes soluciones alternas:

1. Eliminar los estados 7, 8 y 9 sumando todos los valores de las columnas 7, 8 y 9 a la columna 6, reduciéndose la matriz a una de tamaño 7 x 7. Esta solución tendría como desventaja la pérdida de información, al considerar un intervalo de consumo mayor para el estado 6 y, además, los valores de la columna 6 serían exageradamente mayores comparados con los valores de las columnas 1 a 5, lo que vuelve la solución del problema menos significativa y valedera.

2. Estimar los valores que se deben colocar en estas posiciones así: se supone que la posición (m, n) m-ésima fila, n-ésima columna, es igual al promedio de las posiciones (i, n) i = 1, 2, 3, ..., m—1, lo cual tiene como fundamento el hecho de que Ciudad Kennedy se considera en t_o como un barrio de mayor nivel del que inicialmente fue. En resumen, a pesar de que la primera encuesta informa que el número de personas en el estado m = 7, 8, 9 es cero, se supone un número promedio dado por:

$$T[m, n] = \frac{\sum_{i=1}^{m-1} T[i, n]}{m - 1}$$

Además, ya que el número de elementos diferentes de cero por debajo de la diagonal es mínimo, se suponen los renglones 7, 8 y 9 como cero hasta las columnas 6, 7 y 8 respectivamente. Se escoge este método, ya que la única desventaja es la consideración inicial de una mayor población en el barrio en estratos superiores, lo que no afecta las transferencias inferiores. Por tanto, nada se podrá concluir del flujo de gente proveniente de estos estratos.

Se efectúa este proceso para las columnas 7, 8 y 9 dando como resultado el cuadro No. 2.

Cuadro No. 2

VALORES PARA COMPLEMENTAR LA MATRIZ T DE TRANSICION

	7	8	9	F	Total
7	30	30	18	46	124
8		30	18	46	94
9			18	46	64

El valor T [F, F] debe corresponder al número de personas que estaban en el estado ficticio y permanecieron en él. Si se considera que el estado ficticio contiene el mundo exterior al sistema, el cual se supone no afectado por las variaciones internas de crecimiento de la población, se le puede asignar un valor grande y arbitrario. Cualquier número que se coloque dará resultados muy similares, siempre que el número sea grande comparado con los otros valores. Se ha escogido T[F, F] = 1.000.

Teniendo la matriz T completa donde ninguno de los valores de *Total renglón* es cero, se divide cada uno de los valores del renglón i por el valor *Total renglón* de i. Ahora, la nueva matriz M de Markov expresa en M [i, j] la probabilidad del evento: "Una persona arbitraria pasa al estado j dado que estaba en el i". Se cumple la condición de una matriz de Markov, a saber, la suma total de probabilidades en cada renglón es 1.

La matriz M se muestra en el cuadro No. 3 y da todas las probabilidades de transición.

E. La distribución inicial y el método de aplicación

Para completar el modelo es necesario conocer la distribución inicial de todos los individuos en los distintos estados.

Dicha repartición se expresa por medio de un vector columna N, cuya componente j-ésima representa el número de individuos presentes en el estado j.

Así, dada una distribución inicial, se puede obtener el reparto al cabo de una transición por medio de la siguiente fórmula:

$$N_i^1 = P_{1i}N_1 + P_{2i}N_2 + \ldots + P_{ki}N_k + P_{Fi}N_F \quad (1)$$

donde N_i^1 es el número de personas que quedan en el estado i al final de una transición. El valor de k es el número de estados distintos del estado ficticio. El término $P_{ji}N_j$ representa el total de personas que pasan del estado j al estado i durante el intervalo de tiempo de transición.

La distribución resultante N^1, después de una transición, se calcula mediante la relación matricial

$$N^1 = M^t \cdot N^o \quad (2)$$

donde M^t es la traspuesta de la matriz M de Markov y N^o el vector de distribución inicial.

De manera análoga, la distribución resultante después de n transiciones se halla así:

$$N^n = (M^t)^n \cdot N^o \quad (3)$$

Aquí $(M^t)^n$ es la traspuesta de la matriz M de Markov a la potencia n.

En el caso estudiado, la columna *Total renglón* de los cuadros Nos. 1 y 2 da el vector N^o, ya que la suma de los valores de la fila i-ésima de la matriz T corresponde al total de personas que salieron del estado i hacia los otros estados, incluyendo el estado mismo y el ficticio.

De aquí se deduce el siguiente método que permite calcular la evolución espacial del barrio:

1. Se construye el vector $(N_1^o, N_2^o, \ldots, N_k^o, N_F^o)$ sumando todos los valores, renglón por renglón: el resultado es la columna total renglón.

2. Se calcula el vector $(N_1^1, N_2^1, \ldots, N_k^1, N_F^1)$ con la relación (2).

Cuadro No. 3

MATRIZ M DE MARKOV

Est 1	Est 2	Est 3	Est 4	Est 5	Est 6	Est 7	Est 8	Est 9	Est Fic
0.0351	0.0819	0.1520	0.1072	0.1559	0.0643	0.0994	0.0351	0.0195	0.2495
0.0000	0.0000	0.1543	0.1667	0.2346	0.2346	0.0309	0.0000	0.0247	0.1543
0.0156	0.0313	0.0938	0.0938	0.0938	0.1441	0.0660	0.1545	0.0694	0.2378
0.0000	0.0729	0.0000	0.1563	0.0000	0.3750	0.0000	0.1667	0.0521	0.1771
0.0000	0.0000	0.0377	0.0000	0.1046	0.0879	0.3054	0.1632	0.1172	0.1841
0.0000	0.0000	0.0714	0.0000	0.1735	0.0000	0.1429	0.1725	0.2041	0.2347
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.2419	0.2419	0.1453	0.3710
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.3191	0.1915	0.4894
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.2813	0.7188
0.0036	0.0416	0.0410	0.0295	0.0699	0.0560	0.0717	0.0620	0.0223	0.6024

3. El vector $(N_1^1, N_2^1, ..., N_k^1, N_F^1)$ compila las cantidades de personas en los estados 1, 2, ..., k al final del período analizado.

Si se quiere calcular un nuevo vector $(N_1^2, ..., N_k^2, N_F^2)$ correspondiente a dos intervalos de tiempo, es necesario repetir el proceso desde el paso 2.

F. Aplicación

La matriz M antes hallada corresponde a un período de 15 años. Teóricamente para calcular las matrices de transición de períodos correspondientes a 30, 45, 60 y 75 años, es suficiente hallar las matrices M^2, M^3, M^4 y M^5 respectivamente. Esto vale cuando las transformaciones del espacio se consideran uniformemente distribuidas en el tiempo, lo cual implica que los coeficientes de la matriz M sean invariantes en el tiempo, hipótesis únicamente aplicable hasta cuando, por limitaciones físicas, el barrio se acerque a su nivel de saturación. En efecto, el límite de crecimiento y las futuras ampliaciones probablemente no serán tan grandes como las encontradas en el momento de la realización de las encuestas[3].

Sin embargo, no es aconsejable usar la matriz M para extrapolar datos en períodos de tiempo muy grandes, a menos que se pueda verificar la validez de este modelo por medio de una nueva encuesta. En cambio, lo que sí es razonable es utilizar dicha matriz para interpolar datos en períodos de tiempo más pequeños. Estos datos sirven para estimar la evolución de sistemas de viviendas similares a corto plazo.

Así, si se desea conocer la matriz de transición para un período de 7,5 años es suficiente extraer la raíz cuadrada de la matriz M. Para sacar esta raíz cuadrada se utiliza el algoritmo dado por Hosking[4] suponiendo que la matriz es definida positiva, como en este caso; para tal efecto se usa el siguiente proceso iterativo en el cual R_n converge a la raíz cuadrada de M, así:

$$R_o \leftarrow M; \text{ (a } R_o \text{ se le asigna M)}$$

$$R_1 \leftarrow \tfrac{1}{2} \; (R_o \; + \; R_o^{-1} \cdot \; M)$$

$$\vdots$$

$$R_{k+1} \leftarrow \tfrac{1}{2} \; (R_k \; + R_k^{-1} \, M).$$

Cuadro No. 4

PROYECCIONES DE CRECIMIENTO DE "CIUDAD KENNEDY"

Estado / Período	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	513	162	576	96	239	98	124	94	64
7.5	109	196	366	213	300	262	301	192	105
15	32	135	240	199	329	303	329	341	197
30	10	87	144	124	252	257	355	461	334
45	8	80	121	95	218	200	327	461	370
60	8	83	119	92	210	189	310	440	361
75	8	86	121	93	213	191	307	429	350

3 En esta aplicación se usan datos muestrales de *"Ciudad Kennedy"* y un computador IBM PC para obtener los resultados del Cuadro No. 4.

4 HOSKING, W.D.; WALTON, D.J.; "A Faster more stable. Method for computing the Pth roots of positive definite matrices' en *Lineal Algebra and Aplic.* 139-164, 1979.

HOSKING, W.D.; WALTON D.J.; "A Faster Method of Computing the Square Root' of Matrix" en *Trans. Automatic control AC-23;* IEEE; 494-495, 1978.

Para la matriz particular M de Markov, el proceso convergió en 7 iteraciones. Los resultados se muestran en el cuadro No. 5. El cuadro No. 4 contiene los resultados para un período de 7,5 años, usando dicha matriz raíz cuadrada.

Los valores negativos encontrados en el cuadro No. 5 se explican dado que la interpolación implica un retroceso, en el tiempo. Si, por ejemplo, se multiplican los 197 habitantes originalmente clasificados en el estado 9 por el valor −0,0221 de R (9,1) (R = Raíz cuadrada) resulta el valor −4,354, el cual significa que aproximadamente 4 personas salieron del estado 1 hacia cualquier otro estado.

Cuadro No. 5

MATRIZ RAIZ CUADRADA

Est 1	Est 2	Est 3	Est 4	Est 5	Est 6	Est 7	Est 8	Est 9	Est Fict
0.1613	0.1440	0.2320	0.0954	−0.0378	0.1189	0.2087	−0.1305	−0.0320	0.2397
−0.0194	0.1941	0.3834	0.1505	0.9337	−0.5119	−0.3885	0.1175	0.1739	−0.0332
0.0452	0.0523	0.2403	0.1174	0.1594	0.0602	0.0001	0.1678	0.0384	0.1189
−0.0024	0.0142	−0.1074	0.4495	−0.4362	0.9376	0.0616	−0.0003	−0.1423	0.2257
−0.0094	−0.0301	0.0628	0.0095	0.2300	0.2240	0.3773	0.0310	0.0352	0.0695
0.0013	0.0479	0.0989	−0.0392	0.3217	0.0426	0.1000	0.1913	0.2201	0.0155
−0.0004	−0.0046	−0.0020	−0.0014	−0.0029	−0.0043	0.4873	0.2268	0.1036	0.1979
−0.0009	−0.0092	−0.0021	−0.0026	−0.0006	−0.0127	−0.0105	0.5628	0.1779	0.2978
−0.0033	−0.0221	0.0030	−0.0108	0.0381	−0.0766	−0.0437	0.0117	0.5517	0.5520
0.0040	0.0392	0.0196	0.0193	0.0183	0.0651	0.0573	0.0217	−0.0055	0.7609

IV. Conclusiones

A. La concentración de los valores M(i, j) por encima de la diagonal principal de la matriz refleja un mejoramiento en el nivel de vida del barrio. Para esto es suficiente recordar que M (i, j) representa la probabilidad de pasar del estado i al estado j y, por tanto, dicha concentración, muestra que son más factibles las transiciones a estados más altos que a estados más bajos. Es más probable que el habitante de Ciudad Kennedy aumente el nivel de vida y el consumo de vivienda, y no lo contrario.

B. De la Matriz M se deduce:

1. Las personas que estaban en el estado 1 disminuyen el número de cohabitantes en un 25%. O sea emigran de la casa con una probabilidad de 0,24951. Un buen porcentaje mejora su nivel de vida pasando a los estados 3,4 y 5, mientras que sólo un 3.5% tiende a permanecer en el estado 1. Todo esto indica cómo el número de familias con bajo consumo de espacio ha disminuido a través del tiempo.

2. Un análisis análogo se puede efectuar, renglón por renglón, con el objeto de conocer las tendencias de mejora y desmejora del consumo de espacio de las familias.

En general, los pobladores tienden a mejorar su nivel de vida. Sin embargo, las mejoras son paulatinas, es decir, las transiciones muy fuertes en cuanto a variación de consumo de espacio son poco probables. Por ejemplo, cambiar del estado 1 al estado 9 lo efectúan solamente un 1,9% de las personas que originalmente estaban en el estado 1. Este cambio brusco se originó probablemente en una remodelación completa de la casa, o un cambio de la estructura o la cantidad de habitantes se redujo considerablemente.

Es importante anotar que las personas que tenían un consumo relativamente alto como aquéllas que se encontraban en los estados 6 y 7, tienden a cambiar de casa y como no disminuyen de estado de consumo, es probable que salgan del barrio.

3. Los resultados más interesantes de analizar son los del último renglón que muestra lo que una persona interesada en el barrio logra obtener en éste. Las mayores tendencias, en cuanto a pretensión de espacio de vivienda, se refieren a los estados 5, 6 y 7 correspondientes a consumos de 10.0 a 19.5 UF/p. En los estados 2, 4 y 5 las tendencias a salir del barrio son inferiores a aquéllas de los estados altos; lo que se interpreta como una muestra de que la estructura habitacional satisface primordialmente las necesidades de los estratos intermedios.

C. Es importante observar que al obtener estas conclusiones se tuvo en cuenta que el modelo ha sido desarrollado para un período de 15 años, un intervalo de tiempo relativamente grande durante el cual se producirían muchos cambios en cualquier barrio. Lo ideal hubiera sido tener información para intervalos de tiempo más pequeños y así poder deducir conclusiones más confiables.

D. Sería más interesante poder desarrollar un modelo Markoviano con estados discretos y transiciones continuas. Para poder calcular sus parámetros se necesitarían estadísticas más completas en donde, además del valor cualitativo del cambio de uso del espacio de vivienda, se especificara el instante cuando esto ocurre. Pero, dadas las limitaciones de las estadísticas disponibles, no se pudo hacer. No obstante, es conveniente tener en cuenta esta posibilidad para cualquier problema que se modele utilizando las Cadenas de Markov.