Notas sobre Análisis Cuantitativo bajo Expectativas Racionales*

Alberto Carrasquilla

I. Introducción

En este trabajo se presenta un conjunto de literatura relacionada con las diversas implicaciones de tipo cuantitativo asociadas con la hipótesis de expectativas racionales. No se trata, pues, de discutir los fuertes postulados ligados con la hipótesis tanto en el contexto de la teoría como en el de la política macroeconómica[1], sino, más bien, de un trabajo de síntesis de bibliografía reciente acerca de un tema, por lo general, descuidado en nuestro medio y que de ninguna manera tiene pretensiones de originalidad en cuanto a metodología econométrica.

El trabajo se divide en tres partes principales. En la primera parte se presenta lo que constituye el problema econométrico fundamental. Esta discusión se formula a un nivel bastante general, en primera instancia, y los problemas descritos se expresan dentro del contexto de un ejemplo sencillo. En la segunda parte, se formulan, secuencialmente, las especificidades que la hipótesis acarrea en términos de los tres problemas econométricos básicos: identificación, estimación y pruebas de hipótesis. En la tercera parte se recoge el conjunto de la discusión y se formulan algunas conclusiones.

II. El problema básico[2]

El econometrista enfrenta diversos problemas a través de inferencias en torno a tres tipos esencialmente diferentes de series estadísticas. La prime-

---

* Una versión anterior de este trabajo fue presentada en un seminario interno en el Banco de la República. Agradezco a Armando Montenegro el estímulo para su preparación así como sus observaciones. Igualmente, agradezco a los demás participantes su interés y sus comentarios.

1 Para una discusión general sobre las implicaciones teóricas de la hipótesis, ver Lucas y Sargent (1979). Para una discusión sobre las implicaciones de política económica, ver Barro (1976), Sargent y Wallace (1976), McCallum (1979), Mishkin (1982) y Darrat (1985).

2 Esta sección hace uso de Lucas y Sargent (1981) trabajo al cual es referido el lector interesado.

ra Z_t está formada por un conjunto de variables sobre las cuales los agentes económicos no tienen ningún tipo de control. Desde el punto de vista del agente que sirve de base al análisis (hogares, empresas), la serie Z_t está dada exógenamente. Una segunda serie X_t está formada por un conjunto de variables sobre las cuales, a diferencia de Z_t, los agentes económicos tienen algún grado de control. Este control se ejerce sobre la base de acciones concretas que el econometrista observa como la tercera serie, C_t.

En términos más concretos, podemos pensar que las tres series reflejan el comportamiento general de la economía, entendida ésta como un sistema sobre el cual los agentes individuales influyen de diversas maneras, en parte al menos, mediante una serie de ajustes ante condiciones que van cambiando en el tiempo de manera exógena. Esta exogeneidad se captura a través de un análisis de la serie Z_t[3], mientras que los ajustes que hacen los agentes económicos ante variaciones en su ámbito general, se capturan a través de C_t; dichos ajustes se reflejan en alteraciones en la serie X_t.

Definido de esta manera, el problema es claramente expresable a partir de conceptos econométricos. El problema econométrico abarcaría la identificación, estimación y validación de un modelo que expresa las acciones de los agentes económicos en términos de alteraciones en el contexto general donde realizan sus actividades.

3 Las implicaciones de este tipo de tratamientos son diversas. Entre las más preocupantes están las asociadas con el trabajo de Lucas, según el cual el efecto de la política económica es hacer que los parámetros estimados dependan de la acción de política. De esta manera modelarlos como fijos equivale a modelar procesos subóptimos de formación de expectativas (ver Lucas, 1976; Lucas y Sargent, 1979; Begg, 1983 cap. 5).

En términos más formales, la exogeneidad de Z_t se puede expresar de la siguiente manera:

$$Z_{t+1} = f\left[Z_t, \epsilon_t\right] \qquad (1)$$

En esta expresión la dinámica de la serie Z_t se formula como dependiente únicamente de su propia evolución y de la evolución de una serie estocástica ϵ_t. A la evolución de dicha serie, le podemos definir la siguiente formulación general: $\epsilon_t \in E$ tal que $\Phi: E \rightarrow [0, 1]$. La función $\Phi(\cdot)$ entrará de manera crucial, como veremos, en la determinación de la función que buscamos.

De otra parte, la serie X_t se puede expresar como:

$$X_{t+1} = g\left[Z_t, X_t, C_t\right] \qquad (2)$$

Expresión que refleja el hecho de que la dinámica de la variable depende, en sentido causal, tanto del proceso exógeno Z_t, como de la evolución de C_t que como se dijo expresa las diversas acciones tomadas por los agentes, ante los cambios reflejados en la serie Z_t. Definimos, finalmente:

$$C_t = h\left[Z_t, X_t\right] \qquad (3)$$

Planteado en los términos (1)-(3), el problema econométrico se divide en dos partes; en primer lugar, el tratamiento de las funciones $f(\cdot)$, $g(\cdot)$ y $h(\cdot)$ y, en segundo lugar, la identificación y estimación de una función tal que:

$$h = T(f) \qquad (4)$$

La evaluación de la función del tipo general dado en (4), corresponde exactamente a un tratamiento que predijera la naturaleza del comportamiento de los agentes ante variaciones en factores que les son exógenos (por ejemplo, ante cambios en la política económica). Sin embargo, a este nivel de generalidad, queda muy difícil especi-

ficar dicha función. Es necesario delimitar el problema a partir de algún tipo de supuesto que haga explícita una regla de comportamiento. El principio básico del análisis neoclásico, la optimización, constituye, precisamente, el centro de la elaboración teórica de la hipótesis.

Formalmente se asume que las observaciones acerca del comportamiento de los agentes económicos corresponde a un proceso de optimización, sobre el vector V_t de una función intertemporal que, en términos generales, se puede formular de la siguiente manera: $V : X \times Z \times C \rightarrow R$, donde R define un espacio de retornos. El problema se plantea como el de maximizar:

$$E\left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \, V(Z_t, X_t, C_t)\right] \qquad (5)$$

donde E expresa el operador de expectativas matemáticas, y β la tasa de preferencia (o descuento) intertemporal.

Dada la dinámica de X_t y de C_t, y dadas suficientes condiciones iniciales (Z_o, X_o), la función $E(\cdot)$ depende de la distribución que el agente económico presuma para la serie Z_t. La naturaleza de dicha presunción es el eje alrededor del cual debe girar toda teoría acerca de la formación de expectativas. En particular, si se trata de teorías que hagan endógeno dicho proceso, el análisis de la serie Z_t debe adecuarse a la naturaleza optimizante del problema inicial, enunciado en la ecuación (5).

La teoría de expectativas racionales utiliza la noción, ligada al trabajo de H. Simon y H. Theil, de "equivalencia de certidumbre" (EC). La base de la teoría de EC es la siguiente: si un modelo estocástico, del tipo que analizamos, en su solución, difiere de un modelo determinístico, únicamente en los valores observados en el futuro, dicho modelo exhibe EC cuando son reemplazados los valores que se espera en el presente, rijan en el futuro. En este contexto, un modelo con incertidumbre difiere, en términos de la trayectoria dinámica, sólo en tanto existen desviaciones aleatorias alrededor de aquella que rige para un modelo con certidumbre.

Si el postulado de EC se acepta, el problema enunciado en la ecuación (5), bajo dos supuestos adicionales, se puede descomponer en dos subproblemas de optimización dinámica. Los supuestos son los siguientes: en primer lugar, la función V debe ser cuadrática; en segundo lugar, la función $g(\cdot)$ debe ser lineal. Dados estos supuestos, el problema se puede plantear como un problema usual de maximización, sobre las funciones V y $g(\cdot)$ y en otro de previsión (o pronóstico sobre $f(\cdot)$ y $\Phi(\cdot)$. Formalmente, sea Z_t un pronóstico de Z_t tal que:

$$\hat{Z}_t = h_2(Z_t) \qquad (6)$$

La ecuación (6) dice que el pronóstico se forma con base en la observación de la serie misma. En este sentido, el pronóstico es endógeno, y serviría de base para la formulación de procesos de formación de expectativas mucho más generales que el proceso "racional".

A partir de (6) podemos derivar:

$$U_t = h(Z_t, X_t) = h_1(\hat{Z}_t, X_t)$$
$$= h_1\left[h_2(Z_t), X_t\right] \qquad (7)$$

donde, claramente, la función $h_2(Z_t)$ refleja la esencia de la función $h = T(f)$ que estamos buscando identificar.

Planteado de esta manera, tenemos dos problemas de tipo econométrico; de una parte la evaluación de la función $h_1(\cdot)$ y de otra la evaluación de $h_2(\cdot)$. A través de una formulación de tipo simultáneo obtendremos una función de respuesta $h = T(f)$. Ahora bien, el fondo de la crítica de la teoría de expectativas racionales a modelos neoclásicos alternativos, se refiere a la metodología utilizada en la evaluación de la función h_2 (•). Tradicionalmente se ha asumido como un proceso ad hoc o se ha desconocido del todo, formulándose como un proceso enteramente exógeno[4].

Con el fin de estudiar las implicaciones del conjunto de la discusión anterior, vamos a analizar un modelo bastante discutido en los años sesenta, referente a la relación entre las expectativas de inflación y la inflación efectiva.

La idea central, introducida a la literatura económica por Phelps y por Friedman separadamente, es que la inflación efectiva está determinada por las expectativas de inflación y en este contexto es claramente aceleracionista. En términos formales, se trataba de analizar econométricamente una función del tipo general:

$$\hat{\omega} = \alpha \hat{P}^e + f(D_t, X_t) + \epsilon_t \qquad (8)$$

donde $\hat{\omega}$ indica la tasa de crecimiento porcentual de los salarios nominales —indicador que refleja la evolución de los precios— en el contexto de Okun, Perry, etc. D_t mide la tasa de desempleo; X_t un vector de variables macroeconómicas adicionales que deben entrar en la especificación de la curva de Phillips, $f(\cdot)$ y ϵ_t es una variable estocástica.

En términos de la discusión anterior, la serie exógena es P_t y con base en ella los agentes económicos ajustan su comportamiento, realizando previamente una previsión, expectativa, sobre su evolución (es el caso por ejemplo, de las negociaciones de tipo laboral, que se reflejarán en la evolución de ω_t). Si la ecuación (8) se concibe como un componente de un modelo más general, es sensato pensar que las acciones V_t de los agentes económicos, a través de las cuales van adaptándose a los cambios que va implicando en el tiempo la dinámica de P_t, se incorporarían en otra ecuación o bloque de ecuaciones. De esta forma, lo que denominábamos en aquel contexto la función $h_2(\cdot)$ se expresa, en el ámbito presente, como una función que determina la dinámica de P^e_t.

La metodología usual consistía en estimar, de manera simultánea, la ecuación (8) y un planteamiento ad hoc de la función h_2 (•):

$$\hat{P}^e_t = \sum_{i=o}^{m} \nu_i \left[\frac{\Delta P_{t-i}}{P_{t-i-1}}\right] \qquad (9)$$

aquí los coeficientes ν_i (m + 1 en total) indican una estructura determinada de ajuste parcial que se analiza a través de los aportes heredados de la teoría de los rezagos distribuidos. Reemplazando en la ecuación (8) la ecuación (9):

$$\hat{\omega}_t = \alpha \left[\sum_{i=o}^{m} \nu_i \left[\frac{\Delta P_{t-i}}{P_{t-i-1}}\right]\right] + f(\cdot) + \epsilon_t \qquad (10)$$

se tiene un problema de estimación, de m + 2 parámetros (incluyendo α) y m + 1 términos. Con el fin de hacerlo analizable se asume:

$$\sum_{i=o}^{m} \nu_i = 1 \qquad (11)$$

La pregunta sobre la hipótesis Phelps-Friedman puede analizarse a partir de una estimación adecuada de α. Si $\alpha < 1$, el principio de la aceleración sería inválido, resultado que está contenido en Tobin, Gordon, etc.

La noción de que el proceso de formación de expectativas está definido por las ecuaciones (9) y (11) corresponde precisamente con el tipo de formulaciones ad hoc que los teóricos de las expectativas racionales critican duramente. En efecto, en uno de los artículos pioneros sobre el tema, J. Muth (1961) dedica considerables esfuerzos a la formulación explícita de las condiciones bajo las cuales un proceso adaptativo sería optimizante. En el contexto de la presente discusión, Sargent (1971) ha probado que, bajo el supuesto de que el proceso inflacionario fuese errático, un proceso adaptativo, cerrado con base en la ecuación (11), implica errores de expectativa sistemáticos por parte de los agentes económicos respecto de la dinámica de la serie P_t. Partiendo de una propiedad de las series estacionarias en sus covarianzas —como lo sería la serie $\hat{P}_t$ de ser errática— entonces $\sum_{i=o}^{m} \nu_i < 1$ y no igual a 1 la serie se transformaría en:

$$\hat{P}_{t+1} = \sum_{i=o}^{m} \nu_i \left[\frac{\Delta P_{t-i}}{P_{t-i-1}}\right] + \epsilon_{t+1} \qquad (12)$$

Esta prueba es relativamente simple. Supongamos que la serie q_t es estacionaria en sus covarianzas; y que y_t es AR (m):

$$y_{t+1} = \nu_o\, y_t + \nu_1\, y_{t-1}\, t + \ldots$$

$$\ldots + \nu_m\, y_{t-m} + \varepsilon_{t+1} \qquad (13)$$

Es fácil mostrar que dicha ecuación se puede expresar como un sistema de ecuaciones en diferencia, cada una de orden 1:

$$A = \begin{bmatrix} o & 1 & o \cdots o \\ \cdot & o & \\ \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \\ \nu_m & \nu_{m-1} & \cdots \nu_o \end{bmatrix};$$

$$X_i = \begin{bmatrix} x_{it} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_{m+1,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{t-m} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_t \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} o \\ o \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$X_{t+1} = AX_t + B\,\epsilon_{t+1} \qquad (14)$$

El sistema es estacionario —por definición— si $\left|\lambda^A_{max}\right| < 1$ donde λ^A_i es la raíz característica i. Como A es una matriz no negativa e indescomponible:

$$\min_i \Sigma A_{ij} < \lambda^A_{max} < \max_i \Sigma A_{ij}$$

Pero $\left|\lambda^A_{max}\right| < 1$, lo cual implica que: $\sum_i \nu_i < 1$

Al concebir a $\Sigma \nu_i = 1$, se subestima, de manera automática el valor de α; la subestimación será mayor mientras menor sea el valor absoluto de la raíz máxima de la matriz A, es decir, mientras más errática sea la serie de inflación observada.

Problemas análogos al anterior surgen —en mayor o menor grado— a partir de cualquier planteamiento sobre el proceso de formación de expectativas que no formule explícitamente el problema de identificación y estimación

4 Exogeneidad se entiende aquí en el sentido de Granger (1969) y Sims (1972) en el cual una variable es exógena si no es causada, en un sentido estadístico, por ninguna otra variable del sistema. Para una discusión más amplia sobre causalidad y exogeneidad, ver Geweke (1983). Para una aproximación crítica a este tipo de formulaciones, ver Cooley y LeRoy (1985).

de lo que se ha denominado, en términos generales, la función h_2 (•). Siempre que se considere que las expectativas que los agentes económicos tengan acerca de la evolución futura de cualquier variable influyen sobre la dinámica general del sistema, el economista debe ser consciente de que una formulación sin fundamentos en la teoría de la optimización intertemporal, implicará muy probablemente un comportamiento caracterizado por un componente sistemático de error. Esto bajo ninguna circunstancia indica que los agentes prevean de manera perfecta el futuro, simplemente implica que los errores tienden a ser aleatorios y que existe un proceso de aprendizaje. A este nivel, la hipótesis de expectativas racionales es consecuente con la teoría keynesiana, en la misma medida en que, por ejemplo, es posible formular modelos de optimización que presten apoyo microeconómico a la función keynesiana de consumo, a partir de la noción de restricción cuantitativa.

III. Implicaciones econométricas

A. Introducción

La primera formulación explícita de los problemas puramente econométricos asociados con la hipótesis de expectativas racionales fue la de Muth (1960) artículo que apenas se publicó en 1981. Los desarrollos en la teoría econométrica, principalmente en la década de los setenta, referidos al análisis de series de tiempo de un lado, y al análisis de funciones estimables, del otro, sirven de base para un artículo más completo de Wallis (1980). De otra parte, la teoría del control óptimo y su relación con el análisis econométrico justifica otra serie de trabajos cuyas derivaciones más claras son las de Chow (1980) y Taylor (1979).

Para empezar, tomamos el siguiente sistema estructural definido en n ecuaciones para n variables endógenas (y) y k variables exógenas (Z) y un vector de términos aleatorios U_t' :

$$B_o\, y_t + B_1\, y_t^e + \Gamma\, Z_t = U_t' \qquad (15)$$

En la ecuación (15) la matriz y_t^e es de dimensión n X n, es decir el sistema contempla el hecho de que existen relaciones entre las variables endógenas y las expectativas formadas en torno a todas ellas. Esta es evidentemente una formulación extrema; fácilmente podemos reducir el vector de variables endógenas en torno a las cuales se forman expectativas a un vector $m < n$.

En segundo término, postulamos un proceso racional de formación de expectativas:

$$y_t^e = E\left[y_t \mid Z_t\right] + \nu_t' \qquad (16)$$

La ecuación (16) plantea que las expectativas formadas en torno del vector y, (y^e) corresponden al valor esperado de dicho vector, a partir de toda la información disponible en el momento t, información que en este modelo surge básicamente del proceso exógeno Z_t. Asumiendo que tanto U_t como ν_t son vectores aleatorios con media cero, podemos tomar el valor esperado del sistema (15):

$$B_o\, E\left[y_t \mid Z_t\right] + B_1\, y_t^e + \Gamma\, Z_t^e = 0 \qquad (17)$$

utilizando la ecuación (16):

$$B_o\, (y_t^e - \nu_t') + B_1\, y_t^e + \Gamma\, Z_t^e \qquad (18a)$$

$$\text{o: } B\, y_t^e + \Gamma\, Z_t^e = B_o\, \nu_t' \qquad (18b)$$

donde $B = (B_o + B_1)$. Arreglando un poco la expresión (18b):

$$y_t^e = -B^{-1}\, \Gamma\, Z_t^e + B^{-1}\, B_o\, \nu_t' \ (18c)$$

Asumamos, para comenzar, que $Z_t^e = Z_t$. Introduciendo la ecuación (18c) a la ecuación (15):

$$B_o\, y_t + B_1 \left[-B^{-1}\, \Gamma\, Z_t + B^{-1}\, B_o\, \nu_t'\right]$$

$$+ \Gamma\, Z_t = \overset{*}{U}{}_t^1 \qquad (19a)$$

o, más simple:

$$B_o\, y_t + \Gamma_1\, Z_t = \overset{*}{U}{}_t' \qquad (19b)$$

$$\text{donde: } \Gamma_1 = (I - B_1\, B^{-1})\, \Gamma \qquad (20a)$$

$$\text{y: } \overset{*}{U}_t = (U_t^1 - B_1\, B^{-1}\, Bo\, \nu_t) \qquad (20b)$$

Es claro que si

$$E\left[U_t^1 \mid Z_t\right] = E\left[\nu_t \mid Z_t\right] = 0$$

y si B_1, B^{-1} y B_o son matrices no estocásticas:

$$E\,(\overset{*}{U}_t \mid Z_t) = 0 \qquad (20c)$$

La ecuación (19b) define un problema econométrico claramente planteado. De un lado, es evidente que los problemas de identificación se hacen bastante más complejos que en el caso típico debido al hecho de que, al contener términos de expectativa racional, el sistema contiene restricciones a través de las ecuaciones expresadas en la definición de Γ_1. Estas restricciones a través de las ecuaciones ("cross equation restrictions") son el sujeto de una literatura relativamente amplia ya que implican ciertas dificultades en términos de la identificación econométrica del modelo.

Si asumimos algún tipo de forma distributiva para el proceso estocástico $\overset{*}{U}_t$, el problema de estimación quedaría enteramente formulado y las técnicas usuales de máxima verosimilitud serían relevantes. Como ejemplo, sigamos a Muth (1960) asumiendo una forma normal: $\overset{*}{U}_t \sim N\,(o, \overset{*}{\Sigma})$; en dicho caso, se puede formular una función logarítmica de verosimilitud la cual, maximizada en torno a $\overset{*}{\Sigma}$, nos permite examinar la llamada "forma concentrada" y comparar con el resultado que hubiésemos obtenido si, en lugar de utilizar la expresión (18c), hubiésemos utilizado, de manera directa, el vector y_t. El resultado es que dicha función es idéntica en uno y otro caso.

$$L_{\Sigma}^{*} = \ell n\, |B| - \frac{1}{2}\, \ell n\, \left|(B,\Gamma)\, M(B,\Gamma)'\right| \qquad (21)$$

donde M es la matriz generadora de momentos para (y, Z). En otras palabras, como $y_t = y_t^e + \epsilon_t$ donde ϵ_t es ruido blanco, el problema de estimación, desde el punto de vista de máxima verosimilitud, es idéntico cuando se utiliza una u otra variable. Años más tarde, B. McCallum (1976) hizo una serie de sugerencias partiendo del esquema de información limitada, cuyo apoyo teórico puede ser el anterior resultado obtenido por Muth.

Este análisis tiene problemas de diverso tipo; en primer lugar surge de un planteamiento demasiado simplista sobre la relación entre Z_t y Z_t^e. No considera adecuadamente el complejo problema de identificación econométrica del sistema como un todo; trata de manera muy somera todo aspecto de tipo dinámico y formula el caso extremo de una economía en la cual se forman expectativas en torno a todas las variables endógenas al sistema. En muchas instancias estos problemas están asociados con el estado relativamente precario de los instrumentos analíticos. En efecto, durante los años setenta se presentaron importantes desarrollos en dos frentes; el análisis de series temporales (ver Granger y Watson, 1984), en la teoría de la especificación dinámica (ver Hendry, Pagan y Sargan, 1984) y en la teoría de la causalidad estadística (ver Geweke, 1984), desarrollos que permitieron formulaciones más generales del problema (ver Nelson, 1975; Wallis, 1980).

B. Identificación

A continuación presentamos un modelo general a partir del cual se analizan, secuencialmente, los problemas econométricos de identificación, estimación y pruebas de hipótesis. Para empezar, dividimos el vector en dos componentes: un primer grupo en torno al cual los agentes económicos forman expectativas y un segundo grupo en torno al cual no se presenta dicho proceso. De esta manera, y en términos de forma reducida:

$$y_{1t} = \pi_{11}\, y^e_{1t} + \pi_{12}\, Z_t + \nu_{1t} \quad (22a)$$

$$y_{2t} = \pi_{21}\, y^e_{1t} + \pi_{22}\, Z_t + \nu_{2t} \quad (22b)$$

Con base en la ecuación (22a), deducimos una forma observable a través de la especificación explícita de $y^e_{1t} = E\left[y_{1t} \mid Z_t\right]$:

$$y^e_{1t} = (I - \pi_{11})^{-1}\, \pi_{12}\, Z^e_t \quad (23)$$

Asumimos que Z^e_t constituye una solución al problema: $E\,[Z_t \mid \Omega_{t-1}]$ y Ω_{t-1} sintetiza el conjunto de información disponible en el momento t - 1. En los términos de la Sección I, Z^e_t corresponde a un planteamiento explícito de la función h_2 (·).

Utilizando (23) el sistema (22) se reformula como:

$$y_{1t} = \pi_{11}\left[(I - \pi_{11})^{-1}\, \pi_{12}\, Z^e_t\right] + \pi_{12}\, Z_t + \nu_{1t} \quad (24a)$$

$$y_{2t} = \pi_{21}\left[(I - \pi_{11})^{-1}\, \pi_{12}\, Z^e_t\right] + \pi_{22}\, Z_t + \nu_{2t} \quad (24b)$$

Simplificando:

$$y_{1t} = P_{11}\, Z^e_t + P_{12}\, Z_t + \nu_{1t} \quad (25a)$$

$$y_{2t} = P_{21}\, Z^e_t + P_{22}\, Z_t + \nu_{2t} \quad (25b)$$

El siguiente paso consiste en derivar una expresión que sea consecuente con la naturaleza racional del proceso de formación de expectativas que nos preocupa. En otras palabras, debemos asumir que los diversos agentes económicos parten de una evaluación esencialmente correcta acerca de la dinámica de las variables exógenas y que, con base en dicha evaluación, formulan sus expectativas. Digamos que el proceso Z_t está dado por una expresión general:

$$Z_{t+1} = f\left[Z_t, \epsilon_t\right] \quad (26)$$

Con ϵ_t aleatorio. En particular, digamos que asume una estructura ARMA:

$$\Phi(L)\, Z_t = \theta\,(L)\, \epsilon_t \quad (27)$$

con L como el operador de rezago: $L^i\,(Z_t) = Z_{t-i}$ y las funciones Φ y θ definen una estructura polinomial:

$$\Phi(L) = (L + L^2 + \ldots + L^P)$$

Planteado en estos términos, el problema econométrico gira en torno a una evaluación de un sistema definido por las ecuaciones (25a), (25b) y (27). Es bastante claro que, bajo los supuestos usuales, los estimadores minimocuadráticos son asintóticamente consistentes y eficientes, tanto en las ecuaciones (25a)-(25b) como en el sistema de orden k definido en (27).

Existe, sin embargo, el problema de deducir los parámetros π a partir de la estimación de la matriz P. Pasamos ahora a estudiar dicho problema, que es, en síntesis, el problema de la identificación. Es de anotar que hay notables diferencias entre el tratamiento

de dicho problema bajo las condiciones que estamos discutiendo y las condiciones usuales, donde el problema básico consiste en el examen de las condiciones requeridas para la evaluación de una determinada ecuación del sistema. En el presente caso —en contraste— se trata de la identificación del sistema como un todo. En concreto, necesitamos saber si existe suficiente información al interior de la matriz P como para deducir la estructura de la matriz π.

Con el fin de ilustrar los problemas involucrados, analizamos el siguiente caso general. Se ha demostrado (Revankar, 1980) que bajo expectativas racionales, la inclusión de variables de expectativa implica la existencia de restricciones a través de las ecuaciones. El problema consiste en utilizar información disponible (P) e investigar si dicha información es suficiente como para determinar los elementos de las matrices estructurales.

Partamos del siguiente modelo:

$$By_t + \Gamma\, X_t = U_t \quad (28)$$

donde B es una matriz G X G, y_t es un vector (G X 1) de variables endógenas, Γ es una matriz G X K de coeficientes, X_t un vector G X 1 de variables exógenas y U_t es un vector G X 1 de errores aleatorios no observables.

Multiplicando por B^{-1}

$$y_t = -B^{-1}\, \Gamma\, X_t + B^{-1}\, U_t \quad (29)$$

o, más simple:

$$y_t = \pi\, X_t + \nu_t \quad (30)$$

donde, es fácil probar que:

$$B\pi + \Gamma = 0 \quad (31a)$$

en términos más generales, (31a) se puede escribir como:

$$Q\delta = 0 \quad (31b)$$

donde $\delta^1 = (\beta^1_1 \beta^1_2 \cdots \beta^1_G \,;\, \gamma'_1 \cdots \gamma'g)$ es una vectorización de los coeficientes estructurales, en total, (G + K) G · Q, de otra parte, es una matriz GK x G (G + K) definida como:

$$Q = \left[I_G \otimes \pi^1 : I_{GK}\right] \quad (31c)$$

En (31c), I_G denota la matriz identidad (G x G), ⊗ el producto cruz e I_{GK} la matriz identidad (GK x GK).

Si asumimos información previa, representada en un sistema del tipo:

$$\Phi\delta = d \quad (31d)$$

donde Φ es R x (G + K) G y d es (R x 1) con elementos conocidos, combinamos el sistema (31) y obtenemos:

$$W = \begin{pmatrix} Q \\ \Phi \end{pmatrix} \quad (32a)$$

donde, por definición:

$$W\delta = \begin{pmatrix} 0 \\ d \end{pmatrix} \quad (32b)$$

donde (32b) define un sistema de (GK + R) ecuaciones lineales con G (G + K) elementos desconocidos δ. Para que tenga solución como sistema, y para que dicha solución sea única, es necesario que la matriz W tenga rango pleno en sus columnas:
rango W = G(G + K).

Un planteamiento concretamente referido al problema del sistema (25), parte de esta formulación general, conocida como la teoría de las funciones estimables (ver Richmond, 1974; Kelly, 1975). En un tratamiento riguroso y bastante general, Wallis (1980) define δ como un vector de dimensión r que contiene los elementos desconocidos de las matrices estructurales (se asume, por tanto, la información prevía resta del total de parámetros) y el vector P contiene la información obtenida a partir de la matriz P. La condición para la identificación de δ es: siguiendo los planteamientos generales anotados[5],

$$\text{rango}\left[\frac{\partial P}{\partial \delta}\right] = r \qquad (33a)$$

como $P = P(\pi)$:

$$\frac{\partial P}{\partial \delta} = \frac{\partial \pi}{\partial \delta}\,\frac{\partial P}{\partial \pi} \qquad (33b)$$

si $\text{rango}\left[\frac{\partial P}{\partial \pi}\right] = n\,(h + K)$ (en la nomenclatura del modelo inicial), entonces los parámetros π están identificados (existe suficiente información en P). La derivación más importante de este resultado es que $k \geqslant h$ (Begg, 1983 pg. 100) o sea que debe haber tantas, o más, variables exógenas que variables endógenas sobre las cuales se crean expectativas. Claramente, la formulación clásica de Muth que describíamos está sujeta a serias objeciones ligadas con este resultado.

C. Estimación

Pasamos ahora a tratar los problemas de estimación[6]. En general, podemos dividir el problema general en varios subtemas; estimación de una ecuación aislada, estimación del sistema, estimación de formas reducidas y estimación con técnicas de máxima verosimilitud, tanto con plena como con limitada información (ver Hausman, (1983) cap. 4.).

En cuanto al último de estos problemas, debemos notar cómo el sistema (25), se puede reformular de la siguiente manera:

$$y_t = P(\tilde{\pi})\,\overline{Z}_t + \nu_t \qquad (34a)$$

donde:

$$\overline{Z}_t = \left[Z^{e1} : Z^{1}\right] \qquad (34b)$$

El sistema (34a) constituye un caso específico de la formulación general de Sargan (1975) referida al caso en el cual los elementos de la matriz de coeficientes (P) es función de un conjunto de parámetros $\tilde{\pi}$ Aquí $\tilde{\pi}$ es una vectorización de la matriz π . Bajo el supuesto de que los ν_t son independientes y que están distribuídos normalmente, con media cero y varianza $\Omega\nu$, podemos formular una función concentrada de verosimilitud (Goldberger, 1972) cuyo sistema de h condiciones de primer orden sería planteado como función del vector $\tilde{\pi}$:

$$f_i(\tilde{\pi}) = -\,\text{trazo}\left[\left\langle \Omega_{\nu}^{-1}(\tilde{\pi})\left[\frac{y^{1}\overline{Z}}{T} - P(\tilde{\pi})\frac{\overline{Z}^{1}\,\overline{Z}}{T}\right]\cdot\frac{\partial P^{1}}{\partial \tilde{\pi}_i}\right\rangle\right] \qquad (35a)$$

donde:

$$\Omega_{\nu}(\tilde{\pi}) = \frac{\left[y^{1} - P(\tilde{\pi})\,\overline{Z}^{1}\right]\left[y - P^{1}(\tilde{\pi})\right]}{T} \qquad (35b)$$

y: $\nu_t = (\nu_1 \ldots \nu_T)$.

5 Aunque estos planteamientos estén íntimamente ligados con la discusión general anterior, el lector interesado puede consultar los trabajos de Neudecker (1969) y de Rothenberg (1973) que tratan en detalle aspectos de diferenciación matricial aplicado al análisis multivariado. Igualmente, Wallis (1980) retoma los aspectos más destacados de dichos trabajos.

6 Una excelente discusión sobre estimación en el contexto general de los modelos simultáneos es la de Hausman (1983), trabajo del cual se tomaron varios aspectos en lo que sigue.

Una evaluación del sistema (35a) a partir de procedimientos iterativos arrojará estimadores para el vector $\tilde{\pi}$. Dichos estimadores tendrán las características inherentes a todo estimador de máxima verosimilitud.

Las técnicas de estimación bajo información limitada parten de analizar una ecuación del sistema dado en (24) en ausencia de consideraciones detalladas acerca del sistema en su conjunto. Supongamos que a partir del sistema:

$$By_t + Ay^e_t + \Gamma Z_t = U_t \qquad (36)$$

donde $Ay^e_t = A_1 y^e_{1\,t} + A_2 y^e_{2\,t}$ con $A_2 = 0$; miramos la primera ecuación dada por:

$$\beta_1\, y_t + \alpha_1\, y^e_t + \gamma_1\, Z_t = U_{1\,t} \qquad (37)$$

Obviamente, el argumento es aplicable a cualquiera de las n ecuaciones del sistema.

En la ecuación (37) β_1, α_1 y γ_1 son vectores-fila de las matrices B, A y Γ de la ecuación (36). En particular, son las primeras filas. Tomando expectativas de (36):

$$(B + A)\,y^e_t + \Gamma Z_t = 0 \qquad (38a)$$

Simplificando:

$$y^e_t = -(B + A)^{-1}\,\Gamma Z^e_t \qquad (38b)$$

Mirado sobre las h variables de expectativa relacionadas con el vector y_t:

$$y^e_{1\,t} = (I - \pi_{11})^{-1}\,\pi_{12}\,Z^e_t \qquad (39)$$

Como $Z_t = Z^e_t + \epsilon_t$, podemos obviar hasta cierto punto los costos estadísticos asociados con la carencia de información sobre el resto del sistema, en particular en lo referente a la especificación de Z^e_t en la ecuación (39).

Volviendo a la forma reducida:

$$y_{1\,t} = \pi_{11}\,(I - \pi_{11})^{-1}\,\pi_{12}\,Z^e_t + \pi_{12}\,Z^e_t + U_{1\,t} \qquad (40a)$$

sustituyendo:

$$y_{1\,t} = (I - \pi_{11})^{-1}\,\pi_{12}\,Z^e_t + (\pi_{12}\,\epsilon_t + U_{1\,t}) \qquad (40b)$$

donde:

$$\pi_{12}\,\epsilon_t + U_{1\,t} = \nu_{1\,t} \qquad (40c)$$

y: $E(\nu_{1\,t}) = 0$ (40d)

El sistema (40b) consiste en h ecuaciones en las cuales sendas regresiones mínimo-cuadráticas producirán estimadores consistentes de los hk parámetros.

Es evidente que las estimaciones son sensibles a la especificación de Z^e_t. En particular, podemos partir de un postulado acerca del comportamiento dinámico de Z^e_t. Por ejemplo, podemos especificar un proceso (vectorial) de tipo ARMA y estimarlo conjuntamente con (40b). Dicha estimación producirá un vector $\hat{y}_{1\,t}$ de dimensión h que se puede incorporar a la ecuación estructural (36), tal y como se incorporaría un vector predeterminado. El error $y^e_{1\,t} - \hat{y}^e_{1\,t}$ es aleatorio e involucra los términos estocásticos del proceso ARMA (ϵ_t) y de la forma reducida $\nu_{1\,t}$.

Para aclarar los anteriores principios, supongamos que Z^e se ha deducido a través de un análisis de series temporales. En este sentido, la ecuación (40b) se puede reformular:

$$y_{1\,t} = A_1\,Z_{t-1} + \ldots + A_p\,Z_{t-p} + (\pi_{12}\,\epsilon_t + \nu_{1\,t}) \qquad (41)$$

Donde las P matrices A_i son $(T \times K)$. La expresión (41) se puede agregar (para las T observaciones):

$$\underset{\sim}{Y}_1 = Z_o\, \mathbb{A} + \varphi \qquad (42)$$

donde:

$\varphi = (\varphi_1 \ldots \varphi_T)^1;\ \varphi_i = (\pi_{12}\ \epsilon_t + \nu_{1t})_i;$
Y_i es (T × h), $\mathbb{A}$ es (T × PK)

Aplicando MCO a (42):

$$\hat{\mathbb{A}} = (Z_o^{\,1}\, Z_o)\, Z_o^{\,1}\, \underset{\sim}{Y}_1 \qquad (43a)$$

$$\hat{\mathbb{A}} = \mathbb{A} + (Z_o^{\,1}\, Z_o)^{-1}\, Z_o\, \varphi \qquad (43b)$$

Utilizamos $\hat{\mathbb{A}}$ en la ecuación (42) obteniendo:

$$\hat{\underset{\sim}{Y}}_1 = Z_o\, \hat{\mathbb{A}}$$

$$= Z_o\, \mathbb{A} + Z_o\, (Z_o^{\,1}\, Z_o)^{-1}\, Z_o^{\,1}\, \varphi \qquad (43c)$$

de la forma:

$$\hat{\underset{\sim}{Y}}_1 = \underset{\sim}{Y}_1^e + \varphi_1 \qquad (43d)$$

donde:

$$\hat{\underset{\sim}{Y}}_1 - \underset{\sim}{Y}_1^e = \varphi_1$$

$$= Z_o\, (Z_o^{\,1}\, Z_o)^{-1}\, Z_o^{\,1}\, \varphi \qquad (43e)$$

y $\varphi_1 = \left[Z_o\, (Z_o^{\,1}\, Z_o)^{-1}\, Z_o^{\,1}\, \varphi\right]$ tienen un comportamiento aleatorio determinado por aquel de φ, bajo el supuesto de que Z_o es no estocástico. Esto es, deducido con algún detalle, el resultado anunciado anteriormente. La sustitución de $\underset{\sim}{Y}_1^e$ por $\underset{\sim}{Y}_1^e$ al interior del sistema (37) involucra, pues, un error aleatorio. Esto no quiere decir que las estimaciones resultantes sean inconsistentes, de la misma manera que la utilización de variables instrumentales no involucra inconsistencia en el contexto de la estimación mínimo-cuadrática en dos etapas.

Con base en la ecuación (37) podemos redefinir la relación entre una de las variables endógenas incluidas y el resto de las variables, agregando sobre las T observaciones:

$$y_{1i} = \underset{\sim}{Y}_1\, \beta_{1i} + \underset{\sim}{Y}_1^e\ \alpha_{1i} + \underset{\sim}{Z}_i\, \gamma_{1i} + U_{1i} \qquad (44)$$

Donde Y_{1i} es el vector de dimensión T que incluye todas las observaciones de la i-ésima variable endógena contenida en la primera ecuación estructural. $\underset{\sim}{Y}_1$ es una matriz (T x h_{1i}) donde h_{1i} es el número de variables endógenas incluidas en la primera ecuación del sistema, al lado derecho de la igualdad, β_{1i} su vector de h_{1i} coeficientes estructurales, $\underset{\sim}{Y}_1^e$ la matriz (Tx m_{1i}) con las m_{1i} variables de expectativa incluidas, con coeficientes estructurales dados por el vector (m_{1i} x1), α_{1i}; $\underset{\sim}{Z}_i$ es la matriz (Tx K_{1i}) con las T observaciones para las K_{1i} variables exógenas incluidas en la primera ecuación estructural y U_{1i} es el vector (T x 1) de errores aleatorios relacionados con dicha ecuación.

Ahora utilizamos (43c) para reemplazar $\underset{\sim}{Y}_1^e$ por $\hat{\underset{\sim}{Y}}_1$:

$$Y_{1i} = \underset{\sim}{Y}_1\, \beta_{1i} + \hat{\underset{\sim}{Y}}_1\, \alpha_{1i} + \underset{\sim}{Z}_1\, \gamma_{1i} + \left[U_{1i} - Z_o\, (Z_o^{\,1}\, Z_o)^{-1}\, Z_o^{\,1}\, \varphi\, \alpha_{1i}\right] \qquad (45a)$$

simplificando:

$$y_{1i} = \left[\underset{\sim}{Y}_1\ \hat{\underset{\sim}{Y}}_1\ \underset{\sim}{Z}_1\right] \begin{bmatrix} \beta_{1i} \\ \alpha_{1i} \\ \gamma_{1i} \end{bmatrix} + \varphi_1 \qquad (45b)$$

ecuación que es de la forma general:

$$y_{1i} = X_1\, \delta_{1i} + \varphi_1 \qquad (45c)$$

Como es claro, el error aleatorio φ_1 está correlacionado con la matriz X_1, a través del vínculo entre $\underset{\sim}{Y}_1$ y φ definido en (42). Por ello la técnica de mínimos cuadrados ordinarios arroja estimadores inconsistentes de los parámetros δ_{1i}. Sin embargo, seleccionando un conjunto apropiado de variables instrumentales, W_1, podemos obtener un estimador consistente:

$$\hat{\delta}_{1i} = (W_1^1\, X_1)^{-1}\, W_1\, y_{1i} \qquad (46)$$

W_1, como es obvio, debe incluir $\underset{\sim}{Z}_1$ y $\hat{\underset{\sim}{Y}}_1$ y otras funciones lineales de valores actuales y rezagadas de las variables exógenas. Evidentemente, la técnica debe estar relacionada con metodologías minimocuadráticas, como mínimo criterio de selección (Flood y Garber, 1980).

Una alternativa al uso de $\hat{Y}_1$ en la estimación de (44) es la de utilizar Y_1 (observada) partiendo de la conclusión legada con el trabajo de Muth (1961) de que, en el sentido de verosimilitud, $\underset{\sim}{Y}_1^e$ y Y_1 arrojan resultados idénticos (McCallum, 1976; Cumby, Huizinga y Obstfeld, 1983). Esta metodología implica que ecuaciones del tipo:

$$y_1 = \alpha + \beta_o\, y_2 + \beta_1\, y_2^e + \epsilon_t \qquad (47)$$

no producen estimadores independientes de β_o y β_1.

Con base en una utilización de $\underset{\sim}{Y}_1$ (observada) en la ecuación (44), y con el costo asociado a la carencia de independencia de los estimadores para variables que estén incluidas tanto en valores actuales como en valores de expectativa, se obtiene una ecuación con un término aleatorio adicional, término que recoge la diferencia entre $\underset{\sim}{Y}_i$ y $\underset{\sim}{Y}_1^e$. Como $\underset{\sim}{Y}_1$ está correlacionado con dicho término y, $\underset{\sim}{Z}_i$ también (a través del factor ϵ_t), entonces $\underset{\sim}{Z}_i$ no es predeterminada. Se necesitan instrumentos tanto para $\underset{\sim}{Y}_1$, como en el caso anterior, como para $\underset{\sim}{Z}_i$. Dichos instrumentos se basarían, entonces, en los valores rezagados de las K variables exógenas. En el caso dinámico, los errores siguen procesos MA (q) en la medida en que expresan la introducción de información en q + 1 períodos: t, t + 1, ... , t + q (para una discusión del caso q = 1 ver Begg págs. 111-114).

Un caso interesante se presenta cuando la matriz de covarianzas no es diagonal. Dada la asociación entre X_1 y el término de error, problema en dos frentes en el caso de McCallum, la técnica de mínimos cuadrados generalizados es ineficiente (Flood y Garber, 1980; Cumby et al., 1983).

Sintetizando, hemos visto que el supuesto de expectativas racionales (ER) conlleva dos problemas econométricos adicionales a los usuales en modelos estructurales. En primer lugar, implica la necesidad de estimar, con criterios de optimización, los pronósticos para las series de variables exógenas. En segundo lugar, implica construir una proxi para las variables de expectativa. El primer problema es reducible a una estimación de procesos ARMA, el segundo ha sido enfrentado mediante dos técnicas, una que supone mínimos cuadrados en dos etapas donde las variables de expectativa se estiman en la primera etapa. Otra, supone usar variables observadas como proxy y hacer uso del principio según el cual la diferencia entre las dos es ruido blanco. Se introduce, así, un contexto de "errores en las variables". El caso dinámico, donde las expectativas se forman en t-1 respecto del valor de las variables para t, t + 1, ... , t + q trae un problema adicional relacionado con el hecho de que los errores estructurales son autocorrelacionados con la complicación adicional de que técnicas usuales de generalización son inconsistentes. En vista de esto se han propuesto generalizaciones más sofisticadas como la de Cumby et al., (1983).

D. Pruebas de hipótesis

En la literatura sobre expectativas racionales la noción de "prueba de hipótesis" se ha referido, al mismo tiempo, a dos problemas econométricos diferentes. En primer lugar se refiere a la validez o invalidez de la hipótesis de ER bajo el supuesto de un modelo dado. En segundo lugar, se refiere a la validez o invalidez de la especificación bajo el supuesto de ER.

En el primer caso, se trata de formular, de la manera más general posible, una hipótesis alternativa (o un conjunto de hipótesis alternativas) acerca del proceso de formación de expectativas y de evaluar la correspondencia estadística del modelo con ella en relación con aquella del modelo con la hipótesis de ER.

En el segundo caso se trata de plantear especificaciones alternativas del modelo y de evaluar las restricciones implicadas en cada una a la luz de la hipótesis de ER. Esto se hace usualmente dentro de contextos maximoverosímiles (razón de verosimilitudes, multiplicador de Lagrange y Wald principalmente). La idea general consiste en especificar restricciones adicionales a las implicadas por la hipótesis de ER y de evaluar la pertinencia estadística de dicha sobreespecificación.

En cuanto al primer caso, es muy difícil plantear formulaciones de tipo general. Una ilustración bastante clara está contenida en la discusión presentada en la primera sección de este trabajo en torno de la hipótesis aceleracionista. Quedaba claro allí cómo el modelo, y en particular la forma de cerrarlo, implicaba procesos no racionales de formación de expectativas y por tanto errores sistemáticos de previsión. En términos un poco más generales, la evaluación de estas hipótesis corresponde al mismo tipo de problemas discutidos en la literatura Bayesiana, donde la distribución previa se asocia con la hipótesis de ER y la razón de probabilidades de la hipótesis nula se presenta como:

$$\frac{P(Ho/\underset{\sim}{Y}_1)}{P(Ha/\underset{\sim}{Y}_1)} = \left(\frac{P(\underset{\sim}{Y}_1/Ho)}{P(\underset{\sim}{Y}_1/Ha)}\right)\left(\frac{P(Ho)}{P(H_1)}\right) \tag{48}$$

Donde la distribución de $\underset{\sim}{Y}_1$ incorpora la hipótesis de ER. En (48) la razón $\frac{P(\underset{\sim}{Y}_1/Ho)}{P(\underset{\sim}{Y}_1/Ha)}$ es el llamado "factor Bayesiano" y corresponde a un indicador sobre la probabilidad de que la matriz de observaciones provenga de una distribución asociada con la hipótesis nula (modelo 1) frente a la probabilidad de que provenga de una distribución asociada con la hipótesis alternativa (modelo 2). Si el factor Bayesiano es menor que la unidad, se rechaza la hipótesis nula. Las discusiones en torno de la incorporación del principio de ER como información previa en contextos Bayesianos no están muy desarrolladas. Sin embargo, es claro que constituye un eje importante para desarrollos futuros (ver Zellner, 1971; Leamer, 1983).

Respecto del segundo caso, el problema es bastante más específico. Partimos de:

$$\underset{\sim}{Y}_1^e = Z^e \pi_{12}^1 (I - \pi_{11}^1)^{-1} \tag{49}$$

$$Z^e = (Z_{-1}\ Z_{-2} \cdots Z_{-p}) \begin{bmatrix} \phi_1^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \phi_p^1 \end{bmatrix} = Z_o\ \phi^1 \tag{50}$$

La ecuación (49) se deduce de la ecuación (23) agregando las T observaciones. La ecuación (50) presenta en términos agregados el proceso vectorial AR(p) que suponemos constituye una expectativa del proceso vectorial ARMA (p, q) que define a Z. Usamos (49) para obtener:

$$\underset{\sim}{Y}_1 = Z_o\ \phi^1\ \pi_{12}^1\ (I - \pi_{11}^1)^{-1}$$
$$\pi_{11}^1 + Z\,\pi_{12}^1 + V_1 \tag{51}$$

a partir del sistema (25a). La ecuación (49) constituye una hipótesis. Ahora supongamos, en términos generales, que la alternativa es:

$$\underset{\sim}{Y}_1^e = Z_1\ D \tag{52}$$

donde Z_1 incluye a Z_o y a algunos elementos adicionales $(Z_{-p-1} \cdots Z_{-s})$ Bajo la alternativa:

$$\underset{\sim}{Y}_1 = Z_1\ D^1\ \pi_{11}^1 + Z\,\pi_{12}^1 + V_1 \tag{53}$$

$$Z_1 = (Z_o\ Z_*) \tag{54a}$$

$$Z_* = (Z_{-p-1} \cdots Z_{-s}) \tag{54b}$$

(ver Begg, 1983; págs. 114-120).

Podemos reescribir (53) como:

$$\underset{\sim}{Y}_1 = Z_o\ D_o^1\ \ \pi_{11}^1 + Z_*\ D_*^1\ \pi_{11}$$
$$+ Z\,\pi_{12} + V_1 \tag{55}$$

$$D_o^{\ 1} = \phi^1\ \pi_{12}^1\ (I - \pi_{11})^{-1} \tag{56a}$$

y, bajo expectativas racionales:

$$D_* = 0 \tag{56b}$$

El estadístico:

$$ES = \{[D_o^1 - \phi^1 \pi_{12}^1 (I - \pi_{11}^1)^{-1}]\, D_*^1\} \tag{57}$$

se puede vectorizar y se puede evaluar la matriz de covarianzas

$$\Omega_{\tilde{E}S} = E[(\tilde{\epsilon}S)'\,(\tilde{\epsilon}S)]$$

$\tilde{\epsilon}S$ debe tener elementos cercanos a cero y en la medida en que los tenga, la hipótesis de ER se aceptaría. Para derivar una prueba, utilizamos $\Omega_{\tilde{E}S}$ y construimos un test de Wald. Dicho test utiliza las observaciones $\underset{\sim}{Y}_1$ generadas en un proceso aleatorio $f_o\ (\underset{\sim}{Y}_1,\ \pi^o)$ bajo la hipótesis nula y $f_A\ (\underset{\sim}{Y}_1,\ \pi^A)$ bajo la alternativa.

La función de verosimilitud:

$$L\ (\hat{\pi}, \underset{\sim}{Y}_1) = \log f\ (\underset{\sim}{Y}_1, \pi) \tag{58}$$

se maximiza

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial \theta} = 0$$

produciendo un estimador $\hat{\pi}$, cuya varianza $V\ (\hat{\theta})$ es el inverso de la matriz de información de Fisher:

$$V\ (\hat{\pi}) = \frac{II^{-1}\ (\pi)}{T} \tag{59}$$

$$II\ (\pi) = -E \left[\frac{\partial^2\ L\ (\cdot)}{\partial\,\pi\ \partial\,\pi^1}\right]$$

El estadístico:

$$\epsilon S_w = T\ (\hat{\pi} - \pi^o)\ II\ (\hat{\pi})\ (\hat{\pi} - \pi^o) \tag{60}$$

tiene distribución asintótica χ^2 con (dim π^o) grados de libertad (ver Engle, 1984).

IV. Conclusiones

Este trabajo ha presentado diversas discusiones en torno a los aspectos cuantitativos asociados con la hipótesis de expectativas racionales. El eje ha sido la noción de que dentro de modelos macroeconométricos donde la visión que los agentes tengan acerca de la evolución futura de las diversas variables que los afectan, la forma funcional de lo que se presuma acerca del proceso de formación de dicha visión es crucial en términos de la solución al modelo. En segundo lugar, dicha forma funcional puede ser presentada de diversas maneras, algunas implicando pérdidas de tipo sistemático y otras implicando pérdidas sistemáticas nulas. La escogencia consecuente con el principio neoclásico de optimización intertemporal debe estar ligada, evidentemente, con la segunda de éstas.

Existen, pues, dos elementos constitutivos básicos dentro de la teoría de las ER. Primero la noción de que las expectativas son endógenas y, segundo, la noción de que optimizan sobre el vector endógeno pertinente.

Aceptar el primero de estos elementos conlleva diversos problemas econométricos asociados con el hecho de que una ecuación estructural que contenga variables sobre las cuales se forman expectativas, contendrá restricciones en la misma medida en que cada variable de este tipo esté relacionada con las demás. Aceptar el segundo, implica fuentes aún mayores de restricción al introducir el problema, simultáneo al de estimación usual, de solucionar con criterios de optimización la forma en la cual cada variable entra en cada ecuación estructural, entendiéndose que dicha forma se relaciona, de manera compleja, con el conjunto del sistema. El problema de identificación econométrica se hace, pues, crucial en la medida en que debemos considerar, en cada ecuación, diversas interrelaciones que abarcan en mayor grado al sistema en su conjunto, en tanto mayor uso de él se presuma racional por parte de los agentes estudiados. Al contrario, el problema de estimación no implica dificultades esencialmente nuevas. La formulación y pruebas de hipótesis se benefician del hecho de que el supuesto de ER implica restricciones en la estructura del modelo, restricciones que pueden ayudar en la construcción de estadísticos, en lugar de dificultar dicho proceso.

Como se menciona en la introducción, el trabajo no buscó discutir los aspectos teóricos ni las implicaciones de política económica ligados con la hipótesis. A mi juicio los fuertes postulados derivados de la hipótesis reflejan mucho más la naturaleza de los modelos dentro de los cuales se utiliza que una característica de la hipótesis en sí misma.

BIBLIOGRAFIA

Barro (1976) Rational Expectations and the Role of Monetary Policy, *J. of Monetary Economics;* 2; 1-33.

Begg (1983) *The Rational Expectations Revolution in Macroeconomics,* Johns-Hopkins.

Chow (1980) Estimation of Rational Expectations Models. *J. of Economic Dynamics and Control;* 2, 241-55.

Cooley y LeRoy (1985) Atheoretical Macroeconometrics: A Critique. *J. of Monetary Economics,* 16 No. 3, págs. 283-308.

Cumby, Huizinga y Obstfeld (1983) Two-Step. Two-Stage Least Squares Estimation in Models with Rational Expectations. *J. of Econometrics.*

Darrat (1985) Unanticipated Inflation and Real Output. *Canadian J. of Economics* (Feb.).

Engle (1984) Wald, Likelihood Ratio and Lagrange Multiplier Tests in Econometrics, en Griliches e Intriligator Eds. *Handbook of Econometrics,* Vol. 2.

Flood y Garber (1980) A pitfall in the Estimation of Models with Rational Expectations *J. of Monetary Economics,* 6; 433-35.

Geweke (1984) Inference and Causality in Economic Time Series Models en Griliches e Intriligator, Eds. *Op. cit.* Vol. 2.

Goldberger (1972) Structural Equation Methods in the Social Sciences, *Econometrica;* 40, 979-1001.

Granger (1969) Investigating Causal Relations by Econometric Models and Cross-Spectral Methods. *Econometrica,* 37; 424-38.

Granger y Watson (1984) Time Series and Spectral Methods in Econometrics en Griliches e Intriligator, eds. *Op. cit.* V. 2.

Hausman (1983) Specification and Estimation of Simultaneous Equation Models en Griliches e Intriligator *Op. cit.* V. 1.

Hendry, Pagan y Sargan (1984) Dynamic Specification en Griliches e Intriligator, eds. *Op. cit.* Vol. 2.

Kelly (1975) Linear Cross-Equation Constraints and the Identification Problem. *Econometrica,* 43; 125-140.

Leamar (1983) Model Choice and Specification Analysis en Griliches e Intriligator, Eds. *Op. cit.* Vol. 1.

Lucas, R.E. (1976) Econometric Policy Evaluation: A C tique en Brunner y Meltzer (Eds.) *The Phillips Curve and Labor Markets* (Carregie-Rochester. Series on Public Policy, Vol. 1).

Lucas y Sargent (1979) After Keynesian Macroeconomics, Reproducido en Lucas y Sargent Eds. (1981) *Rational Expectations* U. of Minnesota.

Lucas y Sargent (1981) Introduction en Lucas y Sargent Eds. *Op. cit.*

McCallum (1976) Rational Expectations and the Estimation of Econometric Models: An Alternative Procedure. *International Econ. Rev.,* 17; 483-90.

McCallum (1979) The Current State of the Policy Ineffectiveness Debate. *American Econ. Rev., Papers and Proceedings;* 69 pp. 240-245

Mishkin (1982) Does Anticipated Monetary Policy Matter? An Econometric Investigation *J. of Political Economy,* 22-51.

Muth (1960) Estimation of Economic Relationships Containing Latent Expectations Variables en Lucas y Sargent, Eds. *Op. cit.*

Muth (1961) Rational Expectations and the Theory of Price Movements. *Econometrica;* 29 No. 6.

Nelson (1975) Rational Expectations and the Estimation of Econometric Models. *International Econ. Rev.;* 16, 555-61.

Neudecker (1969) Some Theorems on Matrix Differentiation *J. of the American Statistical Association;* 64, 953-63.

Revankar (1980) Testing of the Rational Expectations Hypothesis. *Econometrica,* 48; pp. 1347-65.

Richmond (1974) Identifiability in Linear Models *Econometrica* 42; 731-736.

Rothenberg (1973) *Efficient Estimation with A Priori Information* (Yale: Cowles Foundation Monograph 23).

Sargent (1971) A Note on the Accelerationist Controversy. Reproducido en Lucas y Sargent, eds. *Op. cit.*

Sargent y Wallace (1976) Rational Expectations and the Theory of Economic Policy. *J. of Monetary Economics;* 2; 169-83.

Sims (1972) Money Income and Causality. *American Econ. Rev.* Reproducido en Lucas y Sargent Eds. *Op. cit.*

Taylor (1979) Estimation and Control of a Macroeconomic Model with Rational Expectations en Lucas y Sargent Eds. *Op. cit.*

Wallis (1980) Econometric Implications of the Rational Expectations Hypothesis. *Econometrica,* 48; 49-72.

Zellner (1971) *An Introduction to Bayesian Inference in Econometrics* (Wiley).