

Estimación y Utilización de Sistemas Completos de Ecuaciones de Demanda*

Manuel Ramírez Gómez

I. Introducción

El propósito de este trabajo es el de realizar un análisis sobre el consumo de bienes en Colombia, estimando con información de las diferentes fuentes existentes sistemas completos de ecuaciones de demanda¹. Así mismo, se mostrará cuál puede ser la utilización de sistemas de este tipo, aun cuando no se entrará en detalle en ninguna de las posibles aplicaciones.

Para propósitos de presentación el trabajo está dividido en dos publicaciones, en la primera se hará una exposición de la teoría que constituye la base de este conjunto de estimaciones, se discutirán brevemente las fuentes de información utilizadas y se darán los resultados de las estimaciones realizadas usando la información de series de tiempo. En la segunda se expondrán los resultados de las estimaciones hechas con las Encuestas de Ingresos y Gastos y se presentarán algunas de las aplicaciones de este tipo de ecuaciones.

* Este trabajo forma parte de un conjunto de estudios realizados en el Centro de Estudios sobre Desarrollo Económico, CEDE, de la Facultad de Economía de la Universidad de los Andes para el Departamento Administrativo Nacional de Estadística.

Deseo agradecer a todas las personas que colaboraron en el CEDE y en el DANE a la ejecución de este estudio, en particular a mi asistente, María Teresa Delgado y al director de Sistemas del CEDE Dr. Argemiro Morales.

1. Un sistema completo de ecuaciones de demanda trata en forma conjunta la demanda por todos los bienes y servicios, existirá una ecuación por cada uno de estos bienes y servicios, en la cual la demanda por el bien correspondiente se expresará como una función de los precios de todos los bienes y del ingreso; la estimación se hace en forma simultánea.

II. Teoría

En esta sección se realizará una breve presentación de los aspectos principales de la teoría neoclásica del consumidor con el propósito de servir como referencia a las demás secciones².

En este artículo, dado su propósito, no se harán las demostraciones de los principales resultados, quien esté interesado en ésto puede referirse a la bibliografía de la nota anterior.

A. Aspectos generales

En esta sección se desarrollan los aspectos generales de la teoría del consumidor, cuáles son sus bases teóricas, sus principales resultados, las funciones que se usan, las relaciones entre ellas, las restricciones que la teoría impone a estas funciones. Se realiza a dos niveles : funciones de demanda individuales y funciones de demanda de mercado.

1. Funciones de demanda individuales

Como concepto primitivo de la teoría del consumidor puede usarse la noción de preferencias del consumidor o partir directamente de la llamada función de utilidad. Es bien conocido³ que, si las preferencias cumplen con algunas condiciones⁴, éstas pueden ser representadas numéricamente por una función continua que recibe el nombre de "función de utilidad". Esta función depende de las cantidades de bienes y servicios que consume la persona cuyas preferencias se están analizando. La escogencia que puede realizar dicha persona está restringida por algunos factores, de los cuales el más importante, y muchas veces el único que se analiza explícitamente, es el ingreso que pueda tener dicha persona. En las circunstancias mencionadas, el problema de escogencia que debe resolver un consumidor es equivalente matemáticamente al de :

$$\begin{array}{ll} \max & u(x) \\ & x \\ \text{s.a} & p \cdot x \leq I \end{array} \quad ^5$$

2. Presentaciones recientes completas de la teoría mencionada pueden encontrarse en: Barten, A.P. y V. Böhm (1982), Deaton, A.S. y J. Muellbauer (1980b), Philips, L. (1983) y Varian, H. (1984).

3. Ver referencias de la nota anterior o, para una presentación más rigurosa, Debreu, G. (1959) o Arrow, K.J. y F. H. Hahn (1971).

4. Son completas, reflexivas, transitivas y continuas.

5. Si se hace la suposición adicional de monotonicidad de las preferencias (o sea que el consumidor prefiere una cantidad mayor de todos los bienes a una menor) esta restricción debe satisfacerse con igualdad.

donde:

- x = vector de cantidades de bienes y servicios;
- p = vector de precios de los bienes y servicios;
- I = ingreso del consumidor;
- u = función de utilidad (o de representación de las preferencias).

El resultado de este problema de escogencia es un conjunto de ecuaciones de demanda :

$$x = f(p, I)$$

en la cual se expresa la cantidad consumida de cada uno de los bienes y servicios como una función de los precios y del ingreso del consumidor. Bajo las condiciones ya mencionadas, estas funciones de demanda son funciones continuas de sus argumentos.

Puede demostrarse que estas funciones de demanda deben satisfacer una serie de condiciones, que permitirán, más adelante, eliminar una serie de formas funcionales explícitas como candidatas para la estimación empírica de las funciones.

Las restricciones que deben cumplir las ecuaciones, bajo las suposiciones hechas hasta este momento son:

a) Agotamiento del ingreso: $p \cdot f(p, I) = I$

b) Homogeneidad de grado cero en los precios e ingresos: $f(\lambda p, \lambda I) = f(p, I)$

esta condición equivale a decir que lo que importa para la escogencia son los precios relativos y el ingreso real, no los precios absolutos y el ingreso monetario.

Si las funciones de demanda son diferenciables hay unas condiciones adicionales que deben cumplirse:

c) Simetría de los términos de sustitución. Como es sabido, el efecto que tiene sobre el consumo de un bien un cambio en el precio de otro bien puede separarse en dos efectos: el efecto precio y el efecto sustitución. Como demostró Slutsky (1915) hace más de setenta años, los efectos sustitución deben ser simétricos:

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_j} + x_j \frac{\partial x_i}{\partial I} = \frac{\partial x_j}{\partial p_i} + x_i \frac{\partial x_j}{\partial I}$$

d) La matriz de estos efectos sustitución debe ser negativa semidefinida, en particular el efecto sustitución de un bien con respecto a su propio precio debe ser negativo.

En muchas ocasiones resulta más fácil realizar los análisis de consumo utilizando una serie de funciones que pueden obtenerse directamente a partir de las presentadas anteriormente o que pueden postularse independientemente. La llamada teoría de la

dualidad⁶ muestra cómo se pueden obtener las distintas funciones a partir de una cualquiera de ellas y de una serie de relaciones auxiliares.

Las más importantes de estas funciones son :

i) Función de utilidad indirecta:

$$v(p, I) = u(f(p, I))$$

se obtiene reemplazando en la función de utilidad directa el valor óptimo de la demanda por bienes y servicios a precios p e ingreso I , representa el mayor valor de la función de utilidad que es posible obtener a esos precios y ese ingreso. Como ya se mencionó, puede postularse independientemente y a partir de ella obtener la función de utilidad directa resolviendo un problema de optimización dual al presentado anteriormente, en este problema se trataría de minimizar el valor de v con respecto a p y a I con cantidades dadas que satisfacen la restricción de presupuesto. Utilizando la llamada identidad de Roy :

$$x_i = -(\partial v / \partial p_i) / (\partial v / \partial I)$$

pueden obtenerse las ecuaciones de demanda a partir de las funciones de utilidad indirecta.

ii) Función de gasto. $G(p, u^*)$. Representa el mínimo gasto que es necesario a unos precios p para obtener un nivel dado de satisfacción u^* . Puede obtenerse de dos maneras: despejando I de la función de utilidad indirecta o, a partir de la función de utilidad directa, resolviendo el problema:

$$\begin{aligned} \min & p \cdot x \\ & x \\ \text{s. a } & u(x) = u^* \end{aligned}$$

claramente a partir de la función de gasto se derivan las funciones de utilidad directa e indirecta. A partir de esta función pueden también obtenerse las funciones de demanda compensadas o de Hicks, en las cuales la cantidad consumida se expresa en función de los precios y del nivel de utilidad u^* para ésto se hace uso de la llamada ecuación de Sheppard:

$$h_i(p, u^*) = \partial G(p, u^*) / \partial p_i$$

iii) Funciones de compensación. Existen dos funciones de compensación : la función directa $m(x, p)$ que representa la cantidad de dinero que es necesario dar a un consumidor que estaba consumiendo cantidades x de bienes y servicios para que tenga

⁶ Una exposición completa de esta teoría puede encontrarse en Diewert (1984) y aplicaciones a la teoría del consumidor en el mismo artículo y en los trabajos de Barten y Böhn (1984), Deaton y Mullbauer (1984) y Varian (1984).

el mismo nivel de utilidad si los precios cambian a unos nuevos valores p ; la función indirecta $\mu(p, I, q)$ que representa la cantidad de dinero que hay que entregar a un consumidor que tenía un ingreso I cuando los precios eran p para que tenga el mismo nivel de utilidad si los precios cambian a q . Estos conceptos son equivalentes al de variación compensada de Hicks. Las funciones m son funciones de utilidad directa, cuando se las considera como funciones de x con p constante y son funciones de gasto, cuando se las considera como funciones de p , con x , y por lo tanto u constantes; las funciones μ son funciones de utilidad indirecta, cuando se las considera como funciones de p e I , con q constante y son funciones de gasto, cuando se las considera como funciones de q , con p e I , y por lo tanto v constantes. A partir de estas funciones pueden obtenerse, por lo tanto, las funciones de utilidad directa e indirecta, las funciones de gasto y las funciones de demanda compensada y sin compensar.

iv) El índice "verdadero" del costo de la vida. El propósito de los índices de costo de la vida es el de estimar cuánto vale a precios de este momento un consumo que deje al consumidor en el mismo nivel de utilidad que tenía en el momento que se escogió como base del índice. En estas circunstancias la función de gasto proporciona la base para este cálculo:

$$IVCV = G(p^1, u^0) / G(p^0, u^0)$$

donde p^0 y u^0 son los precios y el nivel de utilidad del período base y p^1 los precios del período de comparación. El índice comunmente usado, el de Laspeyres, solamente coincide con este índice "verdadero" si no hay posibilidades de sustitución en el consumo y, salvo en este caso, es mayor que él.

2. Funciones de demanda de mercado

Las funciones individuales de demanda, analizadas en la sección anterior, no son, en general, observables, no son las de mayor interés para fines de análisis de determinantes de consumo y variaciones en los patrones de éstos. Las funciones que son observables y estimables, aun con datos de demanda a nivel de hogares, son las funciones de demanda de mercado, obtenidas por medio de una agregación de las funciones individuales:

$$X_i(p, I_1, \dots, I_m) = \sum_{j=1}^m x_{ij}(p, I_j)$$

donde :

$X_i(p, I_1, \dots, I_m)$ es la función de demanda de mercado del bien i , es función de los precios de todos los bienes y del ingreso de cada uno de los m consumidores (en general no del ingreso agregado de los consumidores).

$x_{ij}(p, I_j)$ es la función de demanda del consumidor j del bien i , es una función de demanda individual como las que se han discutido hasta el momento.

Las condiciones de agregación de estas funciones, de manera que dependan solamente del ingreso agregado o del promedio del ingreso de los consumidores y tengan propiedades similares a las de demanda individual ya discutidas son muy restrictivas y, en general, no pueden suponerse⁷.

Sin embargo, las funciones de demanda de mercado deben satisfacer, en todos los casos, las propiedades de agotamiento del ingreso y de homogeneidad de grado uno, no necesariamente las propiedades de simetría de los términos de sustitución ni la de que la matriz de estos términos sea semidefinida negativa.

Estas propiedades implican restricciones a las formas funcionales que pueden usarse en el análisis econométrico de estas funciones.

B. Formas funcionales

No todo conjunto de formas funcionales satisface las restricciones impuestas por la teoría económica a las funciones de demanda individual y aún de mercado⁸. Como ya se ha discutido, las funciones utilizadas deben, por lo menos satisfacer las propiedades de agotamiento del ingreso y de homogeneidad de grado cero en los precios y en los ingresos, estas dos sencillas propiedades eliminan una gran parte de las funciones comúnmente usadas en análisis econométrico, o hacen que sólo sean consistentes para valores muy especiales de los parámetros, eliminando su interés. En esta sección se mostrará cómo este problema elimina de consideración las funciones lineales y logarítmicas e introduce algunas formas funcionales relativamente sencillas de manejar y consistente con los requerimientos mínimos impuestos por la teoría del consumidor.

1. Lineal

La forma funcional más sencilla de estimar econométricamente y de manejar en análisis empíricos es la forma lineal bajo la cual la demanda del bien i será:

$$p_i x_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} p_j + \beta_i I$$

Esta expresión claramente cumple con la propiedad de homogeneidad de grado cero; sin embargo, si se suman todas estas expresiones, para obtener el gasto total, que debe ser igual al ingreso se tiene :

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} p_j + \sum_{i=1}^n \beta_i I = I$$

7. Para una discusión detallada de este problema ver Deaton y Mullbauer (1980b).

8. Para una presentación detallada de este problema puede verse Varian (1984) o Lau (1984).

esta expresión solamente se satisface para todos los valores del ingreso y los precios si:

$$\sum_{j=1}^n \beta_j = 1 \quad \text{y} \quad \alpha_{ij} = 0$$

para todos los valores de i y de j . Esto, por supuesto quiere decir que la demanda de bienes no depende de los precios de esos bienes y sólo depende del ingreso. Este hecho hace que las funciones lineales no sean utilizables dentro del marco de un sistema completo de ecuaciones de demanda. Puede darse el caso de que una, o varias de las ecuaciones del sistema sean lineales, pero esto implica que las demás, por lo menos una de ellas, no lo sean, y éstas deben tomar formas funcionales complicadas y difíciles de estimar para garantizar la consistencia del sistema con las dos consecuencias ya mencionadas de la teoría del consumo. Aun el subconjunto lineal de ecuaciones de demanda debe cumplir condiciones bastante restrictivas: las demandas no dependen de los precios o no dependen del ingreso o sus coeficientes tienen que cumplir restricciones poco plausibles.

2. Logarítmica

Algo similar sucede con la forma logarítmica, forma también muy sencilla de estimar y de utilizar, esta forma además es muy popular puesto que sus parámetros dan inmediatamente las elasticidades precio e ingreso de la demanda. La forma funcional es entonces :

$$\ln(x_i) = A + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \ln(p_j) + \beta_i \ln(I)$$

es claro que para satisfacer la condición de homogeneidad de grado cero se requiere que:

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} + \beta_i = 0$$

condición que puede imponerse muy sencillamente a la estimación, trabajando sólo con precios relativos, deflactando el ingreso con el mismo deflactor de los precios y estimando sólo $n+1$ de los $n+2$ parámetros de la ecuación.

La otra condición general, la de agotamiento del ingreso, causa complicaciones mayores, puede mostrarse⁹ que esta condición implica:

$$\beta_i = 1, \quad \alpha_{ii} = -1, \quad \alpha_{ij} = 0 \quad \text{para } i \neq j$$

en otros términos, la condición de agotamiento del producto implica que todas las elasticidades ingreso valen 1, todas las elasticidades precio propias valen -1 y todas las

elasticidades precios cruzadas valen cero. Esto, obviamente no deja margen para ninguna estimación, y adoptar esa especificación funcional equivale a adoptar esos valores numéricos para las elasticidades. Como en el caso de la especificación lineal, puede suceder que algunas de las ecuaciones del sistema completo de ecuaciones de demanda tengan esta forma funcional, pero esto implica que las demás tienen otras formas, en general difíciles de establecer, de estimar y de manejar.

3. Sistema lineal de gasto

En vista de los resultados que se resumen anteriormente, ha sido necesario idear nuevas formas funcionales que sean compatibles por lo menos con las propiedades que la teoría del consumidor impone a las funciones de demanda de mercado y que sean razonablemente fáciles de estimar y de utilizar.

La primera de estas formas funcionales es la llamada Sistema Lineal de Gasto¹⁰, su definición es:

$$p_i x_i = p_i \gamma_i + \beta_i \left(I - \sum_{j=1}^n \gamma_j p_j \right)$$

una interpretación muy usada de esta forma funcional es la de que los términos $p_i \gamma_i$ constituyen un gasto mínimo o de subsistencia en ese bien, por lo tanto el término $(I - \sum \gamma_j p_j)$ es lo que queda del ingreso del consumidor después de satisfechas estas necesidades mínimas y los parámetros β_i son propensiones marginales a consumir después de satisfechas todas las necesidades mínimas. Esta interpretación está en gran parte sugerida por la función de utilidad directa (llamada de Stone-Geary) correspondiente a esta especificación de las funciones de demanda :

$$U(x) = A \prod_{i=1}^n (x_i - \gamma_i)^{\beta_i}$$

esta función de utilidad implica que el consumidor no tiene ninguna satisfacción por consumos menores a γ_i y los mayores los pondera de acuerdo con los parámetros β_i .

La función de utilidad indirecta correspondiente es:

$$v(I, p) = \left(I - \sum_{j=1}^n \gamma_j p_j \right) / \prod_{j=1}^n p_j^{\beta_j}$$

y en ella también puede estudiarse la interpretación mencionada.

10. Esta forma funcional fue introducida a la literatura de estimaciones de sistemas completos de ecuaciones de demanda por Stone (1954).

Este Sistema Lineal de Gasto ha sido muy usado en estimaciones empíricas, utilizando información tanto de series de tiempo como de encuestas de ingresos y gastos¹¹.

A pesar de esto el Sistema Lineal de Gasto tiene problemas importantes, el mayor de ellos es el debido a su rigidez, en un sistema con n bienes habrá en principio n elasticidades ingreso, n elasticidades precio propias y $n(n-1)/2$ elasticidades precio cruzadas, para un total de $n(n+3)/2$ parámetros sin tener en cuenta términos constantes ni otros posibles parámetros, el Sistema Lineal de Gasto permite estimar solamente $2n$ parámetros, de modo que existe un serio problema de identificación; es factible calcular algebraicamente todas las elasticidades¹², pero no es posible saber si esa información está dada por la forma funcional escogida o por los datos empíricos; parece ser que el problema afecta más a las elasticidades precio cruzadas que están sesgadas hacia cero que a las elasticidades precio propias o a las elasticidades ingreso, en particular la forma funcional implica que cada bien es sustituto de todos los otros bienes, no permite ningún tipo de complementariedad, cosa que puede no ser importante cuando se trata de estimar funciones de demanda en grandes agregados, pero puede ser grave a medida que la desagregación se acerque a bienes específicos.

Esto ha hecho que haya habido una gran cantidad de investigación para resolver ese problema y obtener formas funcionales relativamente fáciles de estimar y de manejar pero que permitan una estimación de los parámetros económicos de interés, por lo menos las elasticidades ingreso y todas las precio, propias y cruzadas. Formas funcionales que cumplan con estas características reciben el nombre de formas funcionales flexibles.

4. Formas flexibles

Para la especificación de estas formas se hace uso de la teoría de aproximación de funciones¹³. Las formas más usadas para análisis de consumo son la llamada Sistema de Rotterdam, la forma Trascendental Logarítmica, el Sistema Casi Ideal de Ecuaciones de Demanda, la forma de Leontief Generalizada y otras varias que sería largo enumerar, todas ellas tienen ventajas e inconvenientes propios. En lo que sigue de este trabajo se utilizarán el Sistema de Rotterdam, sobre el cual hay amplia experiencia a nivel internacional y el Sistema Casi Ideal de Ecuaciones de Demanda, que ofrece importantes ventajas teóricas.

11. Ver Lluch, Powel y Williams (1977) para un conjunto de estimaciones de esta función para varios países, incluyendo Colombia y otros países latinoamericanos, Barten (1969) trae estimaciones para países europeos, Howe (1974) analiza la encuesta de Presupuestos Familiares del CEDE haciendo uso de esta metodología.

12. Ver Lluch (1977) para las fórmulas adecuadas.

13. Por ejemplo, el teorema de Taylor del cálculo elemental muestra que cualquier función continua con derivadas continuas puede aproximarse alrededor de un punto por polinomios en la distancia entre un punto cualquiera y el punto sobre el cual se hace la aproximación, los coeficientes de estos polinomios dependen de las derivadas de la función, evaluadas en el punto donde se hace la aproximación.

a. Rotterdam

El llamado modelo de Rotterdam¹⁴ realiza una de estas expansiones en serie, es una aproximación diferencial de primer orden a la función de gasto de un consumidor. Después de varias manipulaciones algebraicas¹⁵ el modelo toma la forma :

$$w_i d \log x_i = b_i d \log I^* + \sum_{j=1}^n b_j d \log p_j$$

donde:

$$d \log I^* = d \log I - \sum_{j=1}^n w_j d \log p_j$$

es el logaritmo del cambio en el ingreso real, el ingreso nominal deflactado por un índice en el cual los precios de los diversos bienes están ponderados geométricamente por w_j , la participación del bien j en el gasto total del hogar. b_i es la propensión marginal a consumir el bien i y c_{ij} es un término relacionado con el coeficiente de sustitución de Slutsky.

Este sistema de Rotterdam permite realizar pruebas de hipótesis de algunos de los resultados de la teoría económica, en particular de las restricciones de homogeneidad de grado cero, caso en el cual debe tenerse que $\sum_k c_{jk} = 0$, y de simetría, caso en el cual $c_{jk} = c_{kj} \forall j, k$

b. Sistema Casi Ideal de Ecuaciones de Demanda

El Sistema Casi Ideal de Ecuaciones de Demanda fue introducido por Deaton y Muellbauer¹⁶ pero tiene una larga historia en artículos de estos dos autores, que han tenido como propósito el obtener condiciones bajo las cuales se cumpla una cierta forma de agregación. Esta agregación consiste no en que la suma de las funciones de demanda para todos los consumidores tenga la misma forma que la función de demanda de cada uno de ellos, condición que como se sabe sólo se cumple con condiciones sumamente restringidas, sino en que la función de participación de cada uno de los bienes en la demanda agregada tiene la misma forma que la participación de cada uno de los bienes en cada una de las funciones individuales. Al mismo tiempo el sistema propuesto es una aproximación de primer orden a cualquier sistema de ecuaciones de demanda; la con-

14. El modelo se debe a Theil (1965) y Barten (1966) y recibe ese nombre debido al lugar de residencia de estos autores en el momento de desarrollarlo.

15. Ver para los detalles Deaton y Muellbauer (1980b) o Barten, A.P. y V. Böhm (1982).

16. Ver Deaton and Muellbauer (1980a) para una discusión completa del modelo y de sus propiedades.

junción de estas características es la que lleva a los autores a calificarlo de Sistema Casi Ideal.

La forma funcional del sistema es :

$$w_i = \alpha_i + \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} \log p_j + \beta_i \log(I/P)$$

donde P es un índice de precios definido por :

$$\log P = \alpha_0 + \sum_{k=1}^n \alpha_k \log p_k + 0.5 \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \gamma_{kj} \log p_k \log p_j$$

Las elasticidades ingreso para el bien i implícitas en esta forma funcional son: $1 + (\beta_i / w_i)$, las elasticidades precio propio son : $1 + (\gamma_{ii} / w_i)$, las elasticidades cruzadas con el bien j son : (γ_{ij} / w_i) .

Como en el caso anterior, esta forma funcional permite realizar pruebas estadísticas de los diversos resultados de la teoría económica.

La función de gasto correspondiente a esta forma funcional es :

$$\log G(u, p) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^n \alpha_k \log p_k + 0.5 \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \gamma_{kj}^* \log p_k \log p_j + u \prod_{k=1}^n p_k^{\beta_k}$$

la función de utilidad indirecta puede obtenerse despejando u de la expresión anterior y la función de utilidad directa no puede obtenerse en forma cerrada en términos de las funciones elementales. Puede, sin embargo, calcularse numéricamente.

c. Otras

En la literatura reciente ha aparecido un gran número de formas flexibles que se han propuesto como sistemas completos de ecuaciones de demanda; entre ellas pueden mencionarse la Trascendental Logarítmica y la Leontief Generalizada, de gran uso en la estimación de funciones de costo y de demanda de insumos en el análisis del productor, y las recientes aproximaciones trigonométricas de Gallant.

Para no recargar este documento no se intentó ninguna estimación basada en estas formas funcionales. Las estimaciones presentadas corresponden a las formas más usadas o a las que tienen propiedades teóricas particularmente interesantes.

Varian ha desarrollado un procedimiento no paramétrico para determinar si un conjunto de observaciones satisface las restricciones impuestas por la teoría económica; para obtener una aproximación de la función de demanda, se espera aplicar este

procedimiento en un artículo futuro, pero, por la misma razón de hacer un documento finito, no se incluye en esta presentación.

5. Aplicaciones

Los resultados que pueden obtenerse utilizando la metodología esbozada en las secciones anteriores de este trabajo tienen un gran número de aplicaciones. Entre ellas pueden mencionarse las siguientes :

- Como un subsector en modelos de análisis general de la economía que se usa para explicar y predecir la división de los gastos en consumo según los diversos sectores de la economía. Como dicen Brown y Deaton¹⁷ "Los gastos de consumo forman el mayor componente del Producto Interno Bruto en la mayor parte de las economías y, por lo tanto, la utilidad de la planeación o predicción desagregada va a depender de su asignación correcta. El cambio en la estructura industrial a lo largo del tiempo depende en una forma crucial de la evolución de los elementos del gasto del consumidor como respuesta a cambios en el ingreso, del mismo modo, el conocimiento de la respuesta a cambios en precios es un elemento importante para la formulación de política fiscal o para cualquier tipo de control económico".
- Para análisis de efectos de políticas fiscales y de otro tipo de intervención que afecte los precios relativos. Este análisis se hace usando las funciones de demanda y las funciones de compensación.
- Para análisis de la evolución del costo de vida y de qué tan apropiados sean los deflatores usados normalmente, los cuales se basan casi siempre en índices tipo Laspeyres, o sea en funciones de utilidad de coeficientes fijos.
- Para análisis de beneficios o costos en evaluaciones de proyectos de inversión.
- Para comprobación estadística de hipótesis de la teoría económica.

En este documento se esbozarán algunas de estas aplicaciones, pero la mayor parte de ellas, en especial la utilización como submodelo de modelos más complicados, se deja para ocasiones futuras.

III. Información

Para realizar este trabajo se contó con dos fuentes de información. La primera está constituida por las series de consumo e ingreso de las Cuentas Nacionales¹⁸. La otra está formada por la Encuesta de Ingresos y Gastos 1984-1985 realizada por el Departamento Nacional de Estadística.

17. Ver Brown, A. y A. Deaton (1972).

18. Tal como están presentadas en el Departamento Nacional de Estadística, DANE, (1988).

A. Series de tiempo

Las formas funcionales mencionadas atrás, Sistema Lineal de Gasto, Sistema de Rotterdam y Sistema Casi Ideal de Ecuaciones de Demanda pueden estimarse utilizando información de una serie de tiempo de ingresos, gasto en los diversos bienes y precios de los bienes mencionados. La única serie de tiempo de estas características existente en Colombia es la contenida en las Cuentas Nacionales del DANE para 1965-1986.

Las Cuentas Nacionales traen información sobre consumo de los hogares para 8 grandes sectores del consumo:

- Alimentos, bebidas y tabaco;
- Vestidos y calzado;
- Alquileres brutos, combustibles y energía eléctrica;
- Muebles, accesorios, enseres domésticos y cuidados de la casa;
- Gastos en cuidados médicos y conservación de la salud;
- Transporte y comunicaciones;
- Esparcimiento, diversiones y servicios culturales y de enseñanza y,
- Otros bienes y servicios.

Trae además subdivisiones de estos grandes rubros en varios niveles.

La información tomada de Cuentas Nacionales es la de Consumo Final de los Hogares a Precios Corrientes (Cuadro 20.1 de Cuentas Nacionales) y Consumo Final de los Hogares a Precios Constantes de 1975 (Cuadro 20.2) ; usando esta información se calculan los Precios Implícitos y las Participaciones en el gasto que son las otras variables requeridas. Como indicador del ingreso se usa, como es común en estos casos, el Gasto Total en bienes y servicios. Esto puede verse como un procedimiento en dos etapas en la primera de las cuales se estima, con las especificaciones usuales, una función consumo agregado y en la segunda se determina la composición del mismo en función del consumo total y de los precios de los bienes.

B. Encuesta del DANE

La otra fuente de información está constituida por la Encuesta de Ingresos y Gastos llevada a cabo por el Departamento Nacional de Estadística en 1984-1985 en las ciudades de Barranquilla, Bogotá, Bucaramanga, Cali, Cartagena, Cúcuta, Ibagué, Medellín, Manizales, Montería, Neiva, Pasto, Pereira, Valledupar y Villavicencio. La encuesta trae información sobre las características socioeconómicas y demográficas de los hogares, los ingresos de diversos tipos y los gastos que realizan éstos. La investigación de campo abarcó a más de 28.000 hogares.

Los gastos están a nivel de artículo específico, para poder manejar la información, analizar los resultados y compararlos tanto con los obtenidos a partir de las series de tiempo como con el estudio de Howe sobre la Encuesta de Presupuestos Familiares del CEDE y con los estudios efectuados en otros países, se agregó la información en los grupos usuales, ya mencionados en el caso de las series de tiempo.

Además del análisis a nivel nacional se hicieron estimaciones en cada una de las ciudades encuestadas y así mismo, por estratos de ingreso.

IV. Estimación y resultados

En esta sección del informe se presentan los resultados de las estimaciones realizadas de las diversas formas funcionales presentadas, utilizando, en donde es posible, tanto la información de las series de tiempo de Cuentas Nacionales como la de la Encuesta de Ingresos y Gastos del DANE.

A. *Series de tiempo*

En primer lugar se presentan los resultados del análisis de series de tiempo.

Con la información de estas series se estimaron los tres sistemas analizados en detalle en la parte teórica de este documento: Sistema Lineal de Gasto, Sistema de Rotterdam y Sistema Casi Ideal de Ecuaciones de Demanda. Las estimaciones se efectuaron tanto en términos totales de la economía como en términos per cápita, usando los datos de población publicados en las Cuentas Nacionales (Cuadro 1 de las Cuentas). La estimación se efectuó tanto para la serie 1965-1986 de la última publicación de Cuentas Nacionales, también se hizo para la serie 1970-1984 contenida en una publicación anterior, esto permite decir algo sobre la estabilidad a lo largo del tiempo de las relaciones estimadas, para ahorrar espacio, en general sólo se presentarán los resultados de la serie más larga. Del mismo modo, aun cuando la estimación se llevó a cabo a varios niveles de desagregación, solamente se presentarán los resultados del nivel más agregado (8 sectores de consumo).

De cada grupo de ecuaciones se hicieron dos estimaciones: la primera usando precios absolutos, la segunda usando precios relativos, dividiendo todos los precios por el precio de Otros bienes y servicios. Esto permite realizar pruebas estadísticas de la hipótesis de homogeneidad de grado cero de las ecuaciones de demanda. Esto no se hizo para el Sistema Lineal de Gasto que incorpora como una suposición esta homogeneidad y no permite contrastarla. No se hizo ningún intento de estimar las ecuaciones imponiendo la simetría de los términos de Slutski, y, por lo tanto, no se puede contrastar esa hipótesis, hacerlo hubiese complicado considerablemente la parte de estimación, y se hubiesen presentado problemas adicionales de grados de libertad.

No es este el lugar de hacer una discusión detallada de los métodos de estimación usados, en general se utilizó un método de máxima verosimilitud o uno que le sea

asintóticamente equivalente¹⁹. Para los propósitos de este estudio se programó un procedimiento de estimación de modelos por el método de máxima verosimilitud, utilizando el procedimiento de Davidon-Fletcher-Powell.

En los cuadros que contienen la presentación de los resultados se usan las siguientes abreviaturas: X es la variable dependiente de las ecuaciones, gasto en un bien en el caso del Sistema Lineal de Gasto, participación multiplicada por cambio en el logaritmo de la cantidad consumida en el caso del Sistema de Rotterdam y participación en el gasto en el caso de Sistema Casi Ideal. P la variable correspondiente a precios absolutos, Q es la correspondiente a precios relativos, son cambios en los logaritmos en el caso del Sistema de Rotterdam y los logaritmos en el caso del Sistema Casi Ideal, I es el término correspondiente al ingreso, Ingreso después de los consumos mínimos para el Sistema Lineal e ingreso deflactado por el índice adecuado en los otros dos casos, c es la constante de la ecuación. Estas variables, excepto el Ingreso, aparecerán con subíndices, correspondientes a sectores, en esta forma:

- 1 Alimentos, Bebidas y Tabaco.
- 2 Vestidos y Calzado.
- 3 Alquileres brutos, combustibles y energía eléctrica.
- 4 Muebles, accesorios, enseres domésticos y cuidados de la casa.
- 5 Gastos en cuidados médicos y conservación de la salud.
- 6 Transporte y comunicaciones.
- 7 Esparcimiento, diversiones y servicios culturales y de enseñanza.
- 8 Otros bienes y servicios.

Los coeficientes estimados aparecen en el primer renglón de los cuadros, en el segundo aparecen las pruebas t correspondientes. R^2 y F son los estadísticos de bondad de ajuste de este nombre correspondientes a cada una de las ecuaciones; DW es el estadístico de Durbin Watson usado para detectar autocorrelación de los residuos y diagnosticar una posible mala especificación de la dinámica del modelo, ES es el error típico de la ecuación y Σ es la suma de los coeficientes de los precios, en el caso de homogeneidad este valor debe ser cero, y se reporta para ver cuánto se aparta una ecuación de la suposición de homogeneidad de grado cero.

1. Sistema lineal de gasto

En esta sección se presentan los resultados de la estimación del Sistema Lineal de Gasto.

El Cuadro 1 contiene los valores estimados para el modelo en términos de consumos e ingresos totales.

19. Para problemas de estimación puede consultarse: Luch et.al (1977) para el Sistema Lineal de Gasto, Barten (1969) para el Sistema de Rotterdam, Deaton y Muellbauer (1980a) para el Sistema Casi Ideal de Ecuaciones de Demanda, Deaton (1986) y Theil (1980) para todos los sistemas considerados y para problemas generales de estimación. Una buena referencia para estimación por máxima verosimilitud es Creamer (1986), para problemas numéricos relacionados con este tipo de estimaciones pueden consultarse Quandt (1983).

Cuadro 1

**SISTEMA LINEAL DE GASTO
GASTOS TOTALES**

Sector	Gama	t	Beta	t	El ingreso	El precio
1	97629	6.84	0.3629	68.86	0.8815	0.5160
2	16578	8.03	0.0553	9.12	0.6631	0.6415
3	32201	8.26	0.1084	24.90	0.9033	0.8174
4	13526	6.79	0.0544	43.44	0.9477	0.7613
5	11744	5.49	0.0652	45.88	1.4052	0.8084
6	31347	6.28	0.1449	31.07	1.2238	0.7730
7	11148	4.13	0.0708	32.14	1.3283	0.6641
8	25261	5.49	0.1381		1.2612	0.6792

No se incluye el coeficiente "t" de la propensión marginal a consumir bienes producidos por el sector 8, puesto que se obtuvo restando de la unidad la suma de los otros siete coeficientes. Los coeficientes γ están expresados en miles de pesos de 1975.

No se incluye el coeficiente "t" de la propensión marginal a consumir bienes producidos por el sector 8, puesto que se obtuvo restando de la unidad la suma de los otros siete coeficientes. Los coeficientes γ están expresados en miles de pesos de 1975.

Las elasticidades ingreso y precio se calcularon de acuerdo con las fórmulas²⁰:

$$\epsilon_i = \beta_i / w_i$$

$$\epsilon_{ii} = (1 - \beta_i) (p_i \gamma_i / v_i) - 1$$

$$\epsilon_{ij} = -\beta_i (p_i \gamma_j / v_i)$$

donde:

ϵ_i elasticidad gasto total de la demanda del bien i;

ϵ_{ii} elasticidad precio propio de la demanda del bien i;

ϵ_{ij} elasticidad precio del bien j de la demanda del bien i.

Como puede verse, los resultados son bastante aceptables, los coeficientes son todos positivos, los coeficientes "t" muestran que los parámetros estimados son todos significativos a un alto nivel y las elasticidades tienen valores que son razonables de acuerdo con la experiencia internacional²¹.

20. Ver Lluch et.al (1977) para una demostración de estas ecuaciones.

21. Para una revisión de estos valores puede verse Lluch et.al (1977) y los Cuadros 3 y 4 de este informe.

Las estimaciones a nivel de gasto per cápita son menos adecuadas, ver Cuadro 2, donde los coeficientes γ están en pesos de 1975. Los estadísticos "t" tienen valores mucho menores que en el caso anterior y además, como puede verse en el cuadro, se tiene la presencia de una propensión marginal a consumir negativa aun cuando no significativamente, en el sector 2, lo cual naturalmente no tiene sentido. Este resultado puede ser causado por problemas del algoritmo de optimización, hay alguna probabilidad de que se haya encontrado un óptimo local y no uno global aun cuando se obtiene el mismo resultado con diversos valores iniciales, o puede indicar que el modelo no es lo suficientemente flexible para reproducir la experiencia colombiana²². Como se verá más adelante, otros modelos arrojan mejores resultados.

Cuadro 2
SISTEMA LINEAL DE GASTO
GASTOS PER CAPITA

Sector	Gama	t	Beta	t	El ingreso	El precio
1	4027.9	5.86	0.2957	4.76	0.7182	0.5641
2	1093.4	3.43	-0.0224	-0.35	-0.2686	1.0970
3	1125.0	5.21	0.1363	3.09	1.1358	0.6633
4	446.8	2.73	0.0767	2.38	1.3362	0.5885
5	437.5	2.19	0.0737	2.79	1.5884	0.7147
6	838.4	1.46	0.2365	4.56	1.9975	0.4424
7	282.6	1.70	0.1108	2.19	2.0788	0.3860
8	1201.6	1.99	0.0926	-	0.8457	0.8155

En ninguno de los dos casos se presentan las elasticidades cruzadas; como se recordará, el Sistema Lineal de Gasto no es un modelo flexible, en el sentido de que en él se puedan estimar todos los parámetros de interés, dado el valor de las elasticidades ingreso y de las elasticidades precio propias (de hecho de una de ellas) se pueden calcular, no estimar, las elasticidades cruzadas, y, por lo tanto, nada puede decirse sobre su nivel de significancia estadística.

El Cuadro 3 presenta un resumen de las estimaciones de las elasticidades gasto total de los estudios reseñados por Lluch y el Cuadro 4 el resumen correspondiente de las elasticidades precio propio. La estimación la realizó Lluch utilizando fuentes de información similares a las de este informe (Cuentas Nacionales de los diversos países). Los sectores son los mismos de las demás tablas.

22. Este hecho se presenta con alguna frecuencia en estimaciones del Modelo Lineal de Gastos con datos de series de tiempo, ver Lluch et.al (1977).

Cuadro 3
VALORES DE LAS ELASTICIDADES GASTO
SEGUN LLUCH

	1	2	3	4	5	6	7	8
Corea	0.72	0.66	0.74	2.76	1.76	3.12	1.78	1.71
Tailandia	0.84	1.20	0.16	1.61	0.93	1.57	1.99	1.55
Filipinas	0.52	0.75	1.82	1.23	1.72	2.39	1.69	2.08
Taiwan	0.57	1.26	1.33	1.33	1.69	2.77	1.76	1.81
Jamaica	0.58	1.95	0.71	2.67	2.35	1.52	2.03	-1.83
Panamá	0.92	1.08	0.68	1.77	0.92	0.90	1.69	0.87
Africa del Sur	0.80	1.39	0.40	1.47	1.02	1.56	0.98	1.44
Grecia	0.73	1.37	0.96	1.28	1.35	1.55	1.37	1.22
Irlanda	0.64	1.33	0.85	2.02	1.07	1.92	1.21	1.19
Puerto Rico	0.49	1.06	0.94	0.98	1.70	1.43	1.57	1.93
Italia	0.87	0.86	1.03	2.17	1.04	1.44	0.93	1.09
Israel	0.66	1.10	0.90	1.61	0.99	1.59	1.44	0.97
Reino Unido	0.30	0.62	1.41	1.14	1.35	2.53	0.89	2.63
Australia	0.43	0.45	1.73	1.06	2.34	1.70	0.22	1.14
Alemania Occ.	0.66	0.78	1.22	1.22	1.21	1.45	1.12	1.74
Suecia	0.76	0.62	0.92	1.13	1.43	1.78	1.09	1.03
Estados Unidos	0.34	1.14	0.90	1.45	1.69	1.14	1.18	2.31
Colombia	0.88	0.66	0.90	0.95	1.41	1.22	1.33	1.26
Todos	0.64	0.98	1.00	1.58	1.39	1.80	1.31	1.54

Como puede observarse, las elasticidades estimadas en este trabajo para Colombia utilizando el Sistema Lineal de Gastos están dentro del campo de variación para estimaciones similares en otros países; este campo de variación es grande y no se muestra un patrón claramente definido para las elasticidades ingreso y gasto, con la clara excepción de la elasticidad ingreso de los alimentos, la cual es en todos los casos menor que la unidad y, en términos generales, desciende con aumentos en el nivel de ingresos de los países. Las elasticidades ingreso de los rubros de Salud, Transporte, Esparcimiento y educación y Otros bienes y servicios son mayores que la unidad en Colombia y en la mayor parte de los países con una amplia variación en los valores. Las elasticidades que muestran un comportamiento más variable son las de vestuario y vivienda, en muchos casos son menores que la unidad, en Colombia por ejemplo, en otros son mayores y no se ve un patrón claro en sus variaciones.

2. Sistema de Rotterdam

En esta sección se presentan los resultados de la estimación del Sistema de Rotterdam. En el Cuadro 5 se muestran los resultados para los consumos totales sin imponer la restricción de homogeneidad de las ecuaciones.

Como puede verse en el cuadro anterior, los resultados son satisfactorios tanto desde el punto de vista estadístico como desde el económico. Las estadísticas globales de ajuste, R^2 , F , son adecuadas, aun cuando el valor de ésta última puede estar

Cuadro 4
VALORES DE LAS ELASTICIDADES PRECIO PROPIO
SEGUN LLUCH

	1	2	3	4	5	6	7	8
Corea	-0.47	-0.13	-0.15	-0.33	-0.23	-1.40	-0.24	-0.20
Tailandia	-0.68	-0.21	-0.09	-0.76	-0.46	-0.76	-0.94	-0.73
Filipinas	-0.35	-0.12	-0.40	-0.25	-0.22	-0.27	-0.19	-0.34
Taiwan	-0.41	-0.35	-0.49	-0.49	-0.46	-0.68	-0.45	-0.54
Jamaica	-0.47	-1.01	-0.43	-1.33	-1.21	-0.82	-1.05	1.13
Panamá	-0.70	-0.62	-0.44	-0.95	-0.52	-0.53	-0.92	-0.47
Africa del Sur	-0.38	-0.34	-0.12	-0.31	-0.20	-0.39	-0.19	-0.27
Grecia	-0.62	-0.83	-0.64	-0.76	-0.80	-0.92	-0.82	-0.72
Irlanda	-0.43	-0.44	-0.31	-0.60	-0.30	-0.60	-0.38	-0.37
Puerto Rico	-0.50	-0.86	-0.78	-0.80	-1.28	-1.11	-1.21	-1.49
Italia	-0.70	-0.54	-0.66	-1.22	-0.62	-0.84	-0.56	-0.63
Israel	-0.31	-0.29	-0.31	-0.39	-0.24	-0.38	-0.36	-0.26
Reino Unido	-0.27	-0.49	-0.86	-0.68	-0.78	-1.33	-0.54	-1.45
Australia	-0.27	-0.20	-0.69	-0.42	-0.85	-0.69	-0.09	-0.48
Alemania Occ.	-0.60	-0.59	-0.90	-0.90	-0.86	-1.01	-0.80	-1.20
Suecia	-0.64	-0.44	-0.65	-0.76	-0.93	-1.11	-0.73	-0.68
Estados Unidos	-0.26	-0.66	-0.59	-0.81	-0.92	-0.68	-0.66	-1.22
Colombia	-0.52	-0.64	-0.82	-0.76	-0.81	-0.77	-0.66	-0.68
Todos	-0.47	-0.46	-0.51	-0.65	-0.60	-0.73	-0.57	-0.69

sugiriendo la presencia de multicolinealidad en las variables explicatorias, los estadísticos de Durbin Watson sugieren la presencia de autocorrelación en algunas ecuaciones, problema que se comentará más adelante. Desde el punto de vista económico, los coeficientes de ingreso y de precio propio tienen siempre el signo previsto por la teoría y son casi siempre significativos, los coeficientes cruzados varían muchísimo, hay unos positivos otros negativos, unos significativos otros no, pero esto no es inesperado y es perfectamente compatible con la especificación teórica.

Las ecuaciones que resultan más satisfactorias son las que corresponden a Alimentos, Vestuario, Muebles, accesorios etc. y Cuidados médicos, la de Alquileres no tiene significativo el precio propio, la de Transporte está en el límite de significancia y se insinúa autocorrelación, la de Esparcimiento tiene un nivel de explicación baja, lo cual puede deberse a la mezcla de Esparcimiento, Cultura y Educación, la de Otros bienes y servicios no tiene significativo el precio propio. No parece que haya una desviación significativa de la homogeneidad de grado cero, pero sobre esto se efectuará un contraste riguroso más adelante.

Para investigar el problema de multicolinealidad, se calcularon los valores característicos de la matriz de correlación de las variables que representan a los precios; los cuatro primeros valores representan el 92.8% de la variación total, el mayor valor característico es 45 veces mayor que el menor, lo cual es un indicio claro de multicolinealidad. Uno de los procedimientos para disminuir el problema y estudiar su

Cuadro 5

**COEFICIENTES DEL SISTEMA NO HOMOGENEO DE ROTTERDAM
CONSUMOS TOTALES**

	C	I	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆	P ₇	P ₈
X ₁	-0.0046	0.3787 7.4532	-0.0689 2.3612	0.0243 0.8820	-0.0065 0.1682	0.0125 0.3306	-0.0054 0.1696	0.0449 2.2638	0.0350 1.2722	-0.0164 0.3229
X ₂	0.0038	0.0769 2.2167	0.0627 3.1465	-0.0476 2.5353	0.0202 0.7621	0.0344 1.3341	0.0098 0.4496	0.0095 0.7040	-0.0337 1.7949	-0.0797 2.3016
X ₃	0.0050	0.01457 1.8190	0.0175 3.8173	0.0121 2.7841	-0.0028 0.4530	-0.0016 0.2647	0.0111 2.2081	-0.0098 3.1214	0.0102 2.3600	-0.0044 0.5485
X ₄	-0.0040	0.1450 7.229	-0.0060 0.5217	0.0167 1.5385	-0.0570 3.7119	-0.0345 2.3149	0.0274 2.1829	-0.0122 1.5575	0.0165 1.5203	0.0476 2.3794
X ₅	-0.0011	0.0837 2.3620	-0.0139 0.6832	-0.0170 0.8857	0.0205 0.7557	0.0296 1.1226	-0.0571 2.5747	0.0081 0.5861	0.0016 0.0813	0.0295 0.8336
X ₆	-0.0016	0.1426 3.4272	0.0151 0.6342	-0.0008 0.0357	0.0363 1.1404	-0.0165 0.5338	-0.0152 0.5850	-0.0296 1.8235	-0.0092 0.4083	0.0347 0.8348
X ₇	0.0037	0.0528 1.9783	-0.0050 0.3286	0.0079 0.5444	-0.0137 0.6715	-0.0053 0.2668	0.0016 0.0928	0.0017 0.1624	-0.0326 2.2546	0.0260 0.9750
X ₈	-0.0011	0.1056 4.3590	0.0335 2.4134	0.0045 0.3448	0.0030 0.1594	-0.0186 1.0324	0.0280 1.8457	-0.0127 1.3403	0.0122 0.9320	-0.0373 1.5441

	R ²	F	DW	ES	Σ
X ₁	0.8972	10.6726	1.7471	0.00399	-0.0244
X ₂	0.7999	4.8850	3.0302	0.00272	-0.0027
X ₃	0.7559	3.7844	2.7102	0.00063	-0.0027
X ₄	0.8594	7.4680	2.7762	0.00157	-0.0015
X ₅	0.7299	3.3022	1.7470	0.00278	0.0012
X ₆	0.7536	3.7381	2.9174	0.00327	0.0148
X ₇	0.7052	2.9238	1.3434	0.00210	-0.0211
X ₈	0.7931	4.6842	1.6344	0.00190	0.0126

efecto es estimar la ecuación con precios relativos en lugar de con precios absolutos, lo cual como ya se comentó, también es necesario para estudiar el contraste de la hipótesis de homogeneidad de grado cero. Los resultados de esta estimación se presentarán más adelante.

Para facilitar la lectura de los resultados, el Cuadro 6 presenta las elasticidades correspondientes, estimadas en la media de la muestra; estos valores se obtienen dividiendo los coeficientes estimados por la participación promedio de cada bien en el gasto total.

Como puede verse en el cuadro mencionado los productos pueden dividirse de acuerdo con sus elasticidades ingreso en tres grandes grupos, el primero de ellos incluye

Cuadro 6

**ELASTICIDADES DEL SISTEMA NO HOMOGENEO DE ROTTERDAM
CONSUMOS TOTALES**

	I	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆	P ₇	P ₈
X ₁	0.9551	-0.1736	0.06119	-0.0165	0.03148	-0.0136	0.1131	0.0882	-0.0413
X ₂	0.9983	0.8132	-0.6182	0.2627	0.4466	0.1267	0.1238	-0.4371	-1.0342
X ₃	0.1137	-0.1369	0.0942	-0.0216	-0.0123	0.0864	-0.0762	0.0798	-0.0342
X ₄	2.4851	-0.1029	0.2865	-0.9767	-0.5914	0.4695	-0.2091	0.2826	0.8161
X ₅	1.5245	-0.2530	-0.3095	0.3733	0.5385	-1.0398	0.1478	0.0284	0.5368
X ₆	1.1882	0.1262	-0.0068	0.3026	-0.1376	-0.1269	-0.2469	-0.0765	0.2888
X ₇	0.9845	-0.0938	0.1467	-0.2558	-0.0987	0.0289	0.0316	-0.6067	0.4841
X ₈	0.9483	0.3013	0.0406	0.0265	-0.1669	0.2512	-0.1139	0.1096	-0.3352

los bienes que tienen una elasticidad ingreso cercana a la unidad, forman parte de él la mayoría de los productos: Alimentos, Vestidos, Transporte, Esparcimientos y Otros; el segundo grupo lo forman aquellos bienes con elasticidad significativamente mayor que la unidad: Muebles y cuidados médicos y el último lo forman los bienes con elasticidad significativamente menor que la unidad: Alquileres. Tres de estos resultados pueden considerarse extraños: la alta elasticidad de los Alimentos y los Muebles y la muy baja de los Alquileres, este último grupo como vimos antes se comporta también de manera poco esperada cuando la especificación funcional es la del Sistema Lineal de Gasto, es necesario esperar a los demás resultados para tratar de explicar estos valores.

Con respecto a la elasticidad precio propia se pueden clasificar en tres grupos: tienen elasticidad baja (menor que 0.3) Alimentos, Alquileres y Transporte, tienen elasticidad intermedia (entre 0.3 y 0.7) Vestidos, Muebles, Esparcimiento y Otros; por último, tiene elasticidad alta (mayor de 0.7) Cuidados Médicos. No se ve ningún resultado extraño en esta parte.

El ejercicio siguiente consiste en la estimación del Sistema de Rotterdam con la imposición de la restricción de homogeneidad de grado cero con respecto a precios e ingresos. Esto se hizo sencillamente utilizando precios relativos, dividiendo el precio de cada bien por el precio de Otros Bienes y Servicios, el Ingreso ya se tenía en términos reales. En estas condiciones el coeficiente de Otros Bienes y Servicios no es estimado sino calculado a partir de la estimación de los otros y de la condición de homogeneidad.

Los resultados de la estimación (Cuadro 7) son también muy satisfactorios, como es de esperarse por el cambio realizado bajaron un poco los estadísticos R^2 pero no fue grande este cambio, los estadísticos F en general mejoraron al aumentarse en uno el número de grados de libertad sin desmejorarse el ajuste global de la ecuación, los estadísticos de Durbin y Watson tienen valores similares a los anteriores. El valor del coeficiente t de la última columna es el de la prueba de la condición de homogeneidad,

Cuadro 7

**COEFICIENTES DEL SISTEMA HOMOGENEO DE ROTTERDAM
CONSUMOS TOTALES**

C	I	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆	P ₇	P ₈
X ₁ -0.0004	0.3602	-0.0787	0.0266	-0.0128	0.0043	0.0036	0.0410	0.0364	0.0203
	7.4509	2.8126	0.9614	0.3300	0.1163	0.1155	2.0811	1.3139	
X ₂ 0.0015	0.1002	0.0750	-0.0506	0.0281	0.0446	-0.0015	0.0145	-0.0354	0.0747
	2.7316	3.5332	2.4091	0.9542	1.5742	0.0627	0.9715	1.6884	
X ₃ 0.0044	0.0171	-0.0162	0.0118	-0.0019	-0.0005	0.0098	-0.0092	0.0100	0.0038
	2.2739	3.7150	2.7277	0.3154	0.0787	2.0372	3.0076	2.3256	
X ₄ -0.0043	0.1464	-0.0052	0.0165	-0.0565	-0.0339	0.0267	-0.0119	0.0164	0.0479
	8.0674	0.4996	1.5912	3.8782	2.4161	2.2952	1.6098	1.5759	
X ₅ -0.0009	0.0826	-0.0145	-0.0169	0.0201	0.0291	-0.0566	0.0079	0.0016	0.0292
	2.5778	0.7832	0.9194	0.7821	1.1744	2.7536	0.6031	0.0899	
X ₆ 0.0015	0.1286	0.0077	0.0010	0.0316	-0.0227	-0.0084	-0.0326	-0.0081	0.0317
	3.2708	0.3373	0.0429	1.0008	0.7467	0.3347	2.0395	0.3605	
X ₇ -0.0005	0.0714	0.0048	0.0055	-0.0074	0.0029	-0.0074	0.0057	-0.0340	0.0300
	2.5039	0.2934	0.3388	0.3252	0.1300	0.4069	0.4879	2.0798	
X ₈ 0.0016	0.0935	0.0272	0.0060	-0.0011	-0.0239	0.0338	-0.0152	0.0131	0.0399
	3.8997	1.9553	0.4395	0.0574	1.2873	2.1966	1.5609	0.9553	

	R ²	F	DW	ES	t
X ₁	0.8860	11.6541	1.7152	0.00402	0.3040
X ₂	0.7260	3.9740	2.6630	0.00305	0.9034
X ₃	0.7355	4.1715	2.6238	0.00063	0.4942
X ₄	0.8588	9.1214	2.7391	0.00151	0.0695
X ₅	0.7296	4.0477	1.7596	0.00267	0.0590
X ₆	0.7304	4.0647	2.6449	0.00327	0.5030
X ₇	0.5875	2.1360	1.1878	0.00237	1.2662
X ₈	0.7511	4.5255	1.4636	0.00200	0.6704

se basa en la relación entre la suma de cuadrados explicada por las dos regresiones, como puede verse en ningún caso se rechaza la hipótesis de homogeneidad de grado cero de las ecuaciones.

Con respecto a los coeficientes de las ecuaciones se pueden hacer los siguientes comentarios: los coeficientes del término de ingreso no presentan cambios importantes, el mayor cambio es el de la ecuación de Vestuarios el cual pasa de valer 0.0769 en el sistema no homogéneo a valer 0.1002 en el homogéneo, aun este cambio no es estadísticamente significativo; lo mismo puede decirse de los coeficientes de ingreso propio; con respecto a los coeficientes de efectos cruzados hay cambios un poco mayores, incluso en

algunas ocasiones se cambia de signo, pero esto nunca sucede con coeficientes que sean significativos. En general los dos grupos de ecuaciones son muy similares entre sí.

Con respecto a la multicolinealidad se hizo el mismo estudio que el que se presentó para el conjunto anterior de ecuaciones. En esta ocasión las cuatro raíces mayores representan un 78% de la varianza y la mayor es 4.5 veces mayor que la menor, de modo que hay mucha menos multicolinealidad en esta ocasión. El hecho de que los coeficientes no cambien mucho significa que el efecto negativo de la multicolinealidad no es muy grande y que, por lo menos, los coeficientes del ingreso y de los precios propios están medidos con precisión satisfactoria.

Las elasticidades (Cuadro 8) muestran un patrón similar al de las ecuaciones anteriores.

En muchas ocasiones las ecuaciones de demanda expresadas en términos de consumo e ingreso per cápita arrojan resultados más satisfactorios que los de las ecuaciones en términos totales. Como parte de este ejercicio se estimaron Sistemas de Rotterdam con los datos en términos per cápita, tanto sin como con la restricción de homogeneidad de grado cero, los Cuadros 9-12 muestran los coeficientes y las elasticidades correspondientes a estas estimaciones.

Como es de esperarse, los estadísticos de ajuste global de las ecuaciones, R^2 y F , bajan de valor en muchas de las ecuaciones, aun cuando no en todas ellas; una parte de la explicación que mostraban antes las ecuaciones estaba dada por el crecimiento de la población, crecimiento que afectaba tanto al ingreso como al consumo de los diferentes bienes. Los coeficientes de ingreso y de precios muestran cambios que no son muy importantes, su significación sube unas veces y baja otras con respecto a los valores que tenía anteriormente, excepto en el caso de Alquileres todos los coeficientes de ingreso

Cuadro 8

**ELASTICIDADES DEL SISTEMA HOMOGENEO DE ROTTERDAM
CONSUMOS TOTALES**

	I	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆	P ₇	P ₈
X ₁	0.9083	-0.1985	0.0671	-0.0323	0.0110	0.0090	0.1033	0.0917	-0.0513
X ₂	1.2999	0.9734	-0.6561	0.3645	0.5789	-0.0191	0.1883	-0.4601	-0.9697
X ₃	0.1336	-0.1263	0.0917	-0.0149	-0.0036	0.0767	-0.0719	0.0782	-0.0299
X ₄	2.5094	-0.0900	0.2832	-0.9685	-0.5807	0.4578	-0.2039	0.2807	0.8213
X ₅	1.5031	-0.2644	-0.3068	0.3661	0.5291	-1.0295	0.1432	0.0300	0.5322
X ₆	1.0711	0.0639	0.0080	0.2631	-0.1889	-0.0703	-0.2720	-0.0676	0.2637
X ₇	1.3311	0.0903	0.1031	-0.1388	0.05338	-0.1387	0.1056	-0.6332	0.5582
X ₈	0.8403	0.2439	0.0542	-0.0099	-0.2143	0.3035	-0.1370	0.1179	-0.3583

Cuadro 9

**COEFICIENTES DEL SISTEMA NO HOMOGENEO DE ROTTERDAM
CONSUMOS PER CAPITA**

	C	I	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆	P ₇	P ₈
X ₁	-0.0050	0.3611 7.5970	-0.0705 2.6356	0.0244 0.9736	-0.0040 0.1112	0.0179 0.5079	-0.0111 0.3742	0.0433 2.3712	0.0364 1.4507	-0.0144 0.3108
X ₂	0.0034	0.0763 2.1571	0.0614 3.0879	-0.0471 2.5224	0.0183 0.6853	0.0354 1.3545	0.0098 0.4453	0.0098 0.7230	-0.0332 1.7808	-0.0769 2.2319
X ₃	0.0017	0.0146 1.4393	-0.0195 3.4001	0.0125 2.3205	0.0002 0.0206	0.0029 0.3822	0.0077 1.2230	-0.0111 2.8520	0.0130 2.4292	-0.0032 0.3225
X ₄	-0.0020	0.1482 7.6655	-0.0028 0.2594	0.0156 1.5269	-0.0585 4.0103	-0.0375 2.6247	0.0307 2.5521	-0.0107 1.4402	0.0137 1.3410	0.0470 2.4953
X ₅	-0.0005	0.8764 2.4855	-0.0125 0.6294	-0.0178 0.9551	0.0202 0.7608	0.0278 1.0679	-0.0554 2.5293	0.0091 0.6729	0.0003 0.0183	0.0291 0.8454
X ₆	-0.0003	0.1463 3.4010	0.0157 0.6503	-0.0007 0.0316	0.0359 1.1073	-0.0201 0.6320	-0.0130 0.4878	-0.0295 1.7845	-0.0098 0.4333	0.0307 0.7321
X ₇	0.0035	0.0587 2.1891	-0.0060 0.3946	0.0086 0.6051	-0.0158 0.7805	-0.0065 0.3288	0.0032 0.1914	0.0022 0.2134	-0.0325 2.2953	0.0275 1.0538
X ₈	-0.0008	0.1071 4.2391	0.0340 2.3943	0.0045 0.3402	0.0037 0.1934	-0.0198 1.0617	0.0281 1.7923	-0.0131 1.3506	0.0121 0.9074	-0.0398 1.6167

	R ²	F	DW	ES	Σ
X ₁	0.9090	12.2062	1.8815	0.00366	-0.0220
X ₂	0.7786	4.2972	3.0725	0.00272	-0.0225
X ₃	0.7500	3.6674	2.6903	0.00078	-0.0025
X ₄	0.8697	8.1610	2.8883	0.00149	0.0026
X ₅	0.7458	3.5857	1.7725	0.00271	-0.0009
X ₆	0.7570	3.8080	2.8850	0.00331	-0.0092
X ₇	0.7107	3.0025	1.2927	0.00207	0.0192
X ₈	0.7809	4.3549	1.6002	0.00195	-0.0097

y de precio propio tienen el signo previsto y son estadísticamente significativos. En general, y salvo lo ya comentado sobre el ajuste global de las ecuaciones, los sistemas no son significativamente diferentes con respecto a la especificación total o per cápita; puede tener un poco más de sentido, cuando se usan las ecuaciones para proyecciones, usar las ecuaciones en términos per cápita y, para obtener los totales, multiplicar dichos resultados por las proyecciones de población.

Para resumir, las ecuaciones del Sistema de Rotterdam se ajustan de una manera satisfactoria a la experiencia histórica colombiana entre 1965 y 1986, con la excepción del sector de Alquileres, cuyos coeficientes no toman valores que sean consistentes con

Cuadro 10
COEFICIENTES DEL SISTEMA HOMOGENEO DE ROTTERDAM
CONSUMOS PER CAPITA

	C	I	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆	P ₇	P ₈
X ₁	-0.0008	0.3435 7.2323	-0.0829 3.1704	0.0281 1.0865	-0.0127 0.3454	0.0080 0.2252	-0.0003 0.0106	0.0385 2.0698	0.0389 1.4991	-0.0177
X ₂	-0.0009	0.0943 2.5106	0.0741 3.5827	-0.0508 2.4839	0.0271 0.9363	0.0454 1.6087	-0.0012 0.0506	0.0147 1.0021	-0.0358 1.7436	-0.0736
X ₃	0.0021	0.0127 1.3199	-0.0208 3.9446	0.0129 2.4606	-0.0008 0.0109	0.0018 0.2466	0.0089 1.4945	-0.0117 3.1084	0.0133 2.5393	-0.0036
X ₄	-0.0025	0.1503 8.3684	-0.0014 0.1366	0.0151 1.5474	-0.0575 4.1486	-0.0364 2.6923	0.0294 2.6285	-0.0101 1.4398	0.0134 1.3637	0.0474
X ₅	-0.0004	0.0869 2.6723	-0.0130 0.07258	-0.0176 0.9944	0.0199 0.7927	0.0274 1.1222	-0.0550 2.7159	0.0089 0.7003	0.0004 0.0249	0.0289
X ₆	0.0015	0.1389 3.4381	0.0105 0.4746	0.0008 0.0376	0.0323 1.0370	-0.0242 0.7972	-0.0085 0.3396	-0.0315 1.9919	-0.0088 0.3979	0.0293
X ₇	-0.0002	0.0742 2.5189	0.0049 0.3003	0.0053 0.3331	-0.0082 0.3623	0.0021 0.0929	-0.0062 0.3382	0.0064 0.5560	-0.0347 2.1560	0.0304
X ₈	0.0011	0.0993 4.0255	0.0286 2.1035	0.0062 0.4591	-0.0001 0.0078	-0.0242 1.3040	0.0329 2.1428	-0.0152 1.5785	0.0132 0.9802	-0.0413

	R ²	F	DW	ES	t
X ₁	0.8932	12.5420	1.7997	0.00380	0.3759
X ₂	0.7061	3.6040	2.7027	0.00300	0.9064
X ₃	0.7382	4.2305	2.4857	0.00077	0.3281
X ₄	0.8678	9.8476	2.7979	0.00144	0.1215
X ₅	0.7457	4.3975	1.7811	0.00260	0.0410
X ₆	0.7480	4.4520	2.7656	0.00323	0.3114
X ₇	0.5902	2.1600	1.1592	0.00235	1.2768
X ₈	0.7544	4.6085	1.4936	0.00197	0.5283

lo esperado a priori. En todos los demás casos los coeficientes que tienen restricciones teóricas sobre su signo las satisfacen, los valores numéricos son razonables. No puede rechazarse la hipótesis de homogeneidad de grado cero de los coeficientes.

De todas las estimaciones las que parecen más satisfactorias son las que en términos per cápita están restringidas por la hipótesis de homogeneidad pero no existe una diferencia importante entre las diferentes estimaciones.

Como en el caso del Sistema Lineal de Gasto, existe una amplia experiencia internacional en el uso de este tipo de ecuaciones, los Cuadros 13 y 14 muestran las es-

Cuadro 11

**ELASTICIDADES DEL SISTEMA NO HOMOGENEO DE ROTTERDAM
CONSUMOS PER CAPITA**

	I	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆	P ₇	P ₈
X ₁	0.9107	-0.1777	0.0616	-0.0101	0.0450	-0.0279	0.1092	0.0364	-0.0144
X ₂	0.9900	0.7972	-0.6110	0.2374	0.4595	0.1270	0.1274	-0.4309	-0.9928
X ₃	0.1142	-0.1518	0.0972	0.0012	0.0224	0.0603	-0.0869	0.1016	-0.0249
X ₄	2.5405	-0.0484	0.2671	-1.0032	-0.6430	0.5257	-0.1833	0.2343	0.8060
X ₅	1.5953	-0.2273	-0.3236	0.3686	0.5067	-1.0090	0.1659	0.0062	0.5289
X ₆	1.2187	0.1311	-0.0060	0.2995	-0.1674	-0.1086	-0.2456	-0.0819	0.2557
X ₇	1.0939	-0.1109	0.1596	-0.2944	-0.1214	0.0595	0.0410	-0.6048	0.5132
X ₈	0.9621	0.3057	0.0408	0.0331	-0.1781	0.2528	-0.1177	0.1086	-0.3576

Cuadro 12

**ELASTICIDADES DEL SISTEMA HOMOGENEO DE ROTTERDAM
CONSUMOS PER CAPITA**

	I	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆	P ₇	P ₈
X ₁	0.8662	-0.2090	0.0709	-0.0319	0.0203	-0.0008	0.0970	0.0980	-0.0446
X ₂	1.2240	0.9612	-0.6599	0.3522	0.5895	-0.0154	0.1913	-0.4641	-0.9548
X ₃	0.0989	-0.1626	0.1004	-0.0063	0.0139	0.0697	-0.0911	0.1038	-0.0278
X ₄	2.5764	-0.0232	0.2596	-0.9855	-0.6230	0.5038	-0.1735	0.2292	0.8126
X ₅	1.5821	-0.2364	-0.3208	0.3621	0.4994	-1.0010	0.1623	0.0081	0.5264
X ₆	1.1570	0.0879	0.0069	0.2693	-0.2016	-0.0711	-0.2624	-0.0731	0.2442
X ₇	1.3815	0.0906	0.0995	-0.1533	0.0383	-0.1155	0.1194	-0.6456	0.5665
X ₈	0.8918	0.2564	0.0554	-0.0013	-0.2171	0.2955	-0.1369	0.1186	-0.3706

timaciones de las elasticidades ingreso y precio propio para varios países²³. La variación de estas estimaciones es mucho menor que en el caso de las obtenidas a partir del Sistema Lineal de Gastos, puesto que no fueron obtenidas en forma independiente; Theil estimó un Modelo de Rotterdam utilizando una mezcla de información de serie de tiempo y corte transversal con información de todos los países y luego calculó las elasticidades para la media de cada país. Si se hubiese realizado la estimación en forma independiente se hubiese obtenido una variación mucho mayor, como lo muestran las

23. Para estas estimaciones ver Theil, H. (1987).

estimaciones de este artículo para Colombia, que difieren en forma importante para muchos sectores de las obtenidas por Theil. De todas maneras es interesante observar la constancia de la elasticidad de vestuario, Theil obtiene 0.95 para todos los países, la estimación nuestra arroja una elasticidad gasto de 0.99, la cual no es diferente en forma estadísticamente significativa a la de Theil. Las elasticidades de los alimentos bajan en una forma regular e importante, las de los demás bienes bajan mucho menos.

Cuadro 13

**ELASTICIDADES GASTO TOTAL
ESTUDIO DE THEIL**

	1	2	3	4	5	6	7	8
India	0.76	0.95	1.52	1.84	1.94	1.76	2.12	1.86
Pakistán	0.74	0.95	1.46	1.68	1.75	1.63	1.86	0.94
Sri Lanka	0.73	0.95	1.43	1.62	1.68	1.58	1.77	1.64
Filipinas	0.70	0.95	1.38	1.52	1.56	1.49	1.62	1.53
Tailandia	0.70	0.95	1.38	1.52	1.56	1.49	1.62	1.53
Malasia	0.68	0.95	1.34	1.45	1.48	1.43	1.52	1.46
Corea	0.67	0.95	1.33	1.43	1.46	1.41	1.50	1.44
Brasil	0.65	0.95	1.31	1.40	1.43	1.39	1.46	1.41
Colombia	0.64	0.95	1.31	1.40	1.42	1.38	1.45	1.40
Siria	0.64	0.95	1.31	1.39	1.41	1.38	1.45	1.40
Irán	0.63	0.95	1.30	1.39	1.41	1.37	1.44	1.39
Rumania	0.62	0.95	1.30	1.38	1.40	1.36	1.43	1.38
Yugoeslavia	0.60	0.95	1.28	1.35	1.37	1.34	1.40	1.36
México	0.59	0.95	1.28	1.35	1.36	1.33	1.39	1.35
Polonia	0.56	0.95	1.27	1.33	1.34	1.32	1.36	1.33
Uruguay	0.55	0.95	1.26	1.32	1.34	1.31	1.36	1.33
Irlanda	0.54	0.95	1.26	1.32	1.33	1.31	1.36	1.32
Hungría	0.54	0.95	1.26	1.32	1.33	1.31	1.36	1.32
Italia	0.51	0.95	1.25	1.31	1.32	1.30	1.34	1.31
Japón	0.49	0.95	1.25	1.30	1.31	1.29	1.33	1.30
España	0.48	0.95	1.24	1.30	1.31	1.29	1.33	1.30
Reino Unido	0.46	0.95	1.24	1.29	1.30	1.28	1.32	1.29
Países Bajos	0.44	0.95	1.24	1.29	1.30	1.28	1.31	1.29
Bélgica	0.41	0.95	1.23	1.28	1.29	1.27	1.30	1.28
Austria	0.41	0.95	1.23	1.28	1.29	1.27	1.30	1.28
Alemania Occ.	0.41	0.95	1.23	1.28	1.29	1.27	1.30	1.28
Francia	0.41	0.95	1.23	1.28	1.29	1.27	1.30	1.28
Dinamarca	0.40	0.95	1.23	1.27	1.28	1.27	1.30	1.28
Luxemburgo	0.39	0.95	1.23	1.27	1.28	1.27	1.30	1.28
Estados Unidos	0.30	0.94	1.22	1.26	1.27	1.25	1.28	1.26

Cuadro 14

**ELASTICIDADES PRECIO PROPIO
ESTUDIO DE THEIL**

	1	2	3	4	5	6	7	8
India	-0.22	-0.45	-0.73	-0.91	-0.97	-0.86	-1.07	-0.91
Pakistán	-0.23	-0.45	-0.69	-0.83	-0.87	-0.79	-0.93	-0.82
Sri Lanka	-0.24	-0.46	-0.67	-0.80	-0.83	-0.76	-0.89	-0.79
Filipinas	-0.24	-0.46	-0.64	-0.74	-0.77	-0.71	-0.81	-0.73
Tailandia	-0.24	-0.46	-0.64	-0.74	-0.76	-0.71	-0.81	-0.73
Malasia	-0.24	-0.46	-0.62	-0.70	-0.72	-0.68	-0.76	-0.69
Corea	-0.24	-0.46	-0.61	-0.70	-0.71	-0.67	-0.74	-0.68
Brasil	-0.24	-0.46	-0.60	-0.67	-0.69	-0.65	-0.72	-0.66
Colombia	-0.24	-0.46	-0.60	-0.67	-0.69	-0.65	-0.72	-0.65
Siria	-0.24	-0.46	-0.60	-0.67	-0.68	-0.65	-0.71	-0.65
Irán	-0.24	-0.46	-0.59	-0.66	-0.68	-0.64	-0.71	-0.65
Rumania	-0.24	-0.46	-0.59	-0.66	-0.67	-0.64	-0.70	-0.64
Yugoeslavia	-0.23	-0.46	-0.58	-0.64	-0.66	-0.62	-0.69	-0.63
México	-0.23	-0.46	-0.57	-0.64	-0.65	-0.62	-0.68	-0.62
Polonia	-0.21	-0.46	-0.57	-0.63	-0.64	-0.61	-0.67	-0.61
Uruguay	-0.21	-0.46	-0.56	-0.62	-0.64	-0.60	-0.66	-0.61
Irlanda	-0.21	-0.46	-0.71	-0.62	-0.64	-0.60	-0.66	-0.60
Hungría	-0.21	-0.46	-0.56	-0.62	-0.64	-0.60	-0.66	-0.60
Italia	-0.19	-0.46	-0.56	-0.61	-0.63	-0.59	-0.65	-0.59
Japón	-0.18	-0.46	-0.55	-0.61	-0.62	-0.59	-0.64	-0.59
España	-0.17	-0.46	-0.55	-0.61	-0.62	-0.59	-0.64	-0.59
Reino Unido	-0.16	-0.46	-0.55	-0.60	-0.62	-0.58	-0.64	-0.58
Países Bajos	-0.15	-0.46	-0.54	-0.60	-0.61	-0.58	-0.63	-0.58
Bélgica	-0.13	-0.46	-0.54	-0.59	-0.61	-0.58	-0.63	-0.57
Austria	-0.13	-0.46	-0.54	-0.59	-0.61	-0.57	-0.63	-0.57
Alemania Occ.	-0.12	-0.46	-0.54	-0.67	-0.61	-0.57	-0.63	-0.57
Francia	-0.12	-0.46	-0.65	-0.67	-0.61	-0.57	-0.63	-0.57
Dinamarca	-0.11	-0.46	-0.65	-0.67	-0.68	-0.57	-0.63	-0.57
Luxemburgo	-0.11	-0.46	-0.65	-0.67	-0.67	-0.57	-0.63	-0.57
Estados Unidos	-0.02	-0.46	-0.64	-0.66	-0.59	-0.56	-0.61	-0.56

3. Sistema Casi Ideal de Ecuaciones de Demanda

La última forma funcional analizada con los datos de series de tiempo fue la del Sistema Casi Ideal de Ecuaciones de Demanda de Deaton y Muellbauer; en esta sección se presentan los resultados de la estimación de este sistema en los mismos casos presentados para el de Rotterdam: en términos totales y per cápita e imponiendo y sin imponer la condición de homogeneidad de grado cero de las ecuaciones del sistema.

Para la interpretación de los resultados contenidos en los cuadros siguientes es necesario tener en cuenta que la hipótesis nula es la de constancia en las participaciones de los diferentes bienes en el gasto, o equivalentemente la de que la función de utilidad es Cobb-Douglas, en este caso las elasticidades ingreso de todos los bienes valdrían uno, las elasticidades precio propias menos uno y las cruzadas cero. De modo que las pruebas de hipótesis son las de diferencia de uno (no de cero) de los términos de ingreso, de menos uno (no de cero) de los de precio propio y de cero de los de precio cruzados.

El Cuadro 15 presenta los resultados para los consumos totales sin imponer la condición de homogeneidad.

Los resultados son muy satisfactorios, las ecuaciones explican, en el sentido estadístico, una enorme proporción de la varianza de las participaciones en el consumo, hay que tener en cuenta que estas participaciones no tienen una tendencia a lo largo del tiempo, y que por lo tanto no se puede explicar un R^2 por una tendencia conjunta debida a otras variables que afectan tanto a las independientes como a las dependientes. Existen indicios de autocorrelación en los residuos en varias ecuaciones, lo cual puede estar apuntando a una distinta especificación dinámica, es decir a que el efecto de un cambio de ingresos o de precios no se agota en el año en el cual ocurre sino que tiene efectos en períodos posteriores, en esta investigación no se hará ningún esfuerzo para tener en cuenta estos efectos, esto se deja para un trabajo futuro.

Como era de esperarse, al trabajar con los logaritmos de los precios y no con los cambios de estos logaritmos, hay más multicolinealidad en este caso que en el del Sistema de Rotterdam, el primer componente principal explica más del 99% de la varianza total y es cerca de 20000 veces mayor que el último; a pesar de esto los coeficientes de mayor interés parecen estar estimados con precisión razonable.

Los coeficientes de los efectos cruzados son muchas veces significativos, debe anotarse que el coeficiente de los precios de los alimentos es significativo en casi todas las ecuaciones, lo cual puede explicarse por el efecto ingreso que debe tener al gastarse en estos bienes una proporción bien grande del ingreso total de los consumidores.

La información sobre las estimaciones que se realizaron imponiendo la condición de homogeneidad aparecen en el Cuadro 16. Como puede apreciarse, no se puede rechazar esta hipótesis. Las ecuaciones que aparecen son de excelente calidad estadística, inclusive los problemas de autocorrelación que aparecen en las demás especificaciones disminuyen en forma importante en ésta. La multicolinealidad también se disminuye.

Cuadro 15

**COEFICIENTES DEL SISTEMA CASI IDEAL NO HOMOGENEO
CONSUMOS TOTALES**

	C	I	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆	P ₇	P ₈
X ₁	1.5840	-0.0932	0.2028	-0.0378	0.0211	0.0113	-0.0347	0.0131	0.0055	-0.1669
		3.7413	9.8656	1.5197	0.5513	0.2887	0.9170	0.6199	0.1792	3.1056
X ₂	-0.2670	0.0279	0.0267	0.0322	-0.0228	0.0142	0.0110	-0.0000	-0.0322	-0.0423
		2.0478	2.3769	2.3693	1.0930	0.6638	0.5322	0.0022	1.9355	1.4424
X ₃	0.9120	-0.0630	-0.0623	0.0021	0.0843	-0.0050	0.0050	-0.0223	0.0002	0.0093
		7.3137	8.7663	0.2404	6.3735	0.3666	0.3868	3.0686	0.0173	0.4996
X ₄	-0.4380	0.0394	-0.0361	0.0162	-0.0481	0.0200	0.0286	-0.0244	0.0134	0.0198
		4.1326	4.5916	1.6963	3.2855	1.3316	1.9763	3.0196	1.1513	0.9641
X ₅	-0.0080	0.0045	-0.0597	-0.0108	0.0069	0.0326	-0.0180	-0.0111	-0.0005	0.0609
		0.2404	3.8356	0.5750	0.2384	1.1008	0.6291	0.6949	0.0227	1.4982
X ₆	-0.2915	0.0323	-0.0299	-0.0194	0.0307	-0.0346	-0.0260	0.0755	-0.0085	0.0164
		2.1099	2.3682	1.2655	1.3057	1.4364	1.1181	5.8240	0.4539	0.4965
X ₇	-0.4823	0.0427	-0.0460	0.0230	-0.0628	-0.0057	-0.0037	-0.0138	0.0216	0.0767
		2.4922	3.2578	1.3476	2.3894	0.2124	0.1442	0.9536	1.0337	2.0771
X ₈	0.0102	0.0078	0.0048	-0.0061	-0.0065	-0.0317	0.0356	-0.0176	0.0012	0.0252
		0.5997	0.4469	0.4657	0.3254	1.5462	1.8018	1.5967	0.0765	0.8954

	R ²	F	DW	ES	Σ
X ₁	0.9844	77.2235	1.8232	0.00328	-0.0143
X ₂	0.9839	74.7087	2.9983	0.00179	-0.0133
X ₃	0.9848	79.1377	1.9386	0.00113	-0.0113
X ₄	0.9406	19.3686	2.6430	0.00125	0.0107
X ₅	0.8114	5.2588	1.6824	0.00248	-0.0003
X ₆	0.9938	197.8558	2.8190	0.00201	-0.0043
X ₇	0.7660	4.0017	1.5028	0.00225	0.0108
X ₈	0.9875	96.7763	1.6597	0.00171	-0.0050

Cuadro 16

**COEFICIENTES DEL SISTEMA CASI IDEAL HOMOGENEO
CONSUMOS TOTALES**

	C	I	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆	P ₇	P ₈
X ₁	1.0098	-0.0475	0.1772	-0.0098	-0.0457	-0.0384	0.314	0.0115	0.049	-0.1311
		3.8008	9.6440	0.4208	2.0301	1.1106	1.4198	0.4871	0.1420	
X ₂	0.2660	-0.0145	0.0504	0.0062	0.0392	0.0603	-0.0504	0.0014	-0.0316	-0.0755
		1.7233	4.0773	0.3962	2.5815	2.5900	3.3759	0.0868	1.3708	
X ₃	0.4601	-0.0270	-0.0824	0.0241	0.0317	-0.0440	0.0571	-0.0235	-0.0003	0.0374
		4.2619	8.8381	2.0266	2.7775	2.5121	5.0788	1.9583	0.0165	
X ₄	-0.0108	0.0054	-0.0171	-0.0046	0.0016	0.0569	-0.0206	-0.0232	0.0138	0.0138
		0.8558	1.8304	0.3897	0.1363	3.2362	1.8255	1.9267	0.7953	
X ₅	-0.0219	0.0056	-0.0603	-0.0101	0.0053	0.0314	-0.0164	-0.0111	-0.0005	0.0618
		0.7001	5.0940	0.6733	0.3646	1.4107	1.1494	0.7285	0.0245	
X ₆	-0.4613	0.0458	-0.0375	-0.0111	0.0110	-0.0493	-0.0065	0.0750	-0.0087	0.0270
		6.7126	3.7382	0.8689	0.8937	2.6110	0.5342	5.8004	0.4639	
X ₇	-0.0515	0.0084	-0.0268	0.0021	-0.0127	0.0316	-0.0533	-0.0127	0.0220	0.0499
		0.9527	2.0707	0.1249	0.8002	1.2951	3.4157	0.7581	0.9136	
X ₈	-0.1902	0.0237	-0.0041	0.0037	-0.0298	-0.0490	0.0587	-0.0181	0.0010	0.0376
		3.9442	0.4650	0.3276	2.7507	2.9445	5.5052	1.5895	0.0614	

	R ²	F	DW	ES	t
X ₁	0.9784	68.1932	1.8481	0.00369	0.2226
X ₂	0.9662	42.8495	2.0944	0.00248	0.3830
X ₃	0.9547	31.6348	31.6348	0.00187	0.5020
X ₄	0.8552	8.8579	2.3078	0.00188	0.8935
X ₅	0.8113	6.4509	1.6749	0.00238	0.0524
X ₆	0.0033	223.0455	2.5787	0.00201	0.0651
X ₇	0.6597	2.9074	1.6569	0.00260	1.1369
X ₈	0.9854	101.3346	1.8818	0.00178	0.1312

La información sobre las elasticidades en las dos especificaciones aparece en los Cuadros 17 y 18. Los valores que toman las elasticidades ingreso de la demanda de alimentos son más bajos que los obtenidos anteriormente, lo cual es una mejora en los resultados, las elasticidades ingreso de los alquileres son también más altas, pero aún parecen ser muy bajas, las demás tienen valores razonables. Las elasticidades precio propio toman todos valores negativos y, con la excepción de la correspondiente a muebles en la especificación homogénea, son diferentes de cero; sin embargo, las elasticidades precio cambian de valor en muchos casos entre las dos especificaciones, lo cual

Cuadro 17

**ELASTICIDADES DEL SISTEMA CASI IDEAL NO HOMOGÉNEO
CONSUMOS TOTALES**

	I	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆	P ₇	P ₈
X ₁	0.7650	-0.4887	-0.0953	0.0532	0.0285	-0.0874	0.0329	0.0137	-0.4208
X ₂	1.3617	0.3463	-0.5822	-0.2964	0.1842	0.1426	-0.0003	-0.4173	-0.5494
X ₃	0.5086	-0.4859	0.0161	-0.3424	-0.0387	0.0394	-0.1743	0.0014	0.0724
X ₄	1.6755	-0.6192	0.2768	-0.8246	-0.6581	0.4901	-0.4174	0.2297	0.3399
X ₅	1.0825	-1.0863	-0.1971	0.1257	0.5936	-1.3277	-0.2017	-0.0096	1.1094
X ₆	1.2694	-0.2495	-0.1611	0.2560	-0.2881	-0.2166	-0.3711	-0.0708	0.1367
X ₇	1.7948	-0.8571	0.4290	-1.1700	-0.1064	-0.0670	-0.2572	-0.5976	1.4286
X ₈	1.0702	0.0432	-0.0544	-0.0585	-0.2844	0.3201	-0.1581	0.0109	-0.7739

Cuadro 18

**ELASTICIDADES DEL SISTEMA CASI IDEAL HOMOGÉNEO
CONSUMOS TOTALES**

	I	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆	P ₇	P ₈
X ₁	0.8801	-0.5531	-0.0248	-0.1152	-0.0968	0.0793	0.0291	0.0123	-0.3306
X ₂	0.8115	0.6543	-0.9190	0.5081	0.7826	-0.6536	0.0180	-0.4101	-0.9802
X ₃	0.7890	-0.6543	0.1877	-0.7525	-0.3437	0.4453	-0.1837	-0.0022	0.2920
X ₄	1.0933	-0.2933	-0.0795	0.0268	-0.0248	-0.3525	-0.3980	0.2373	-0.1160
X ₅	1.1027	-1.0976	-0.1847	0.0962	0.5717	-1.2985	-0.2024	-0.0098	1.1251
X ₆	1.3819	-0.3125	-0.0925	0.0915	-0.4105	-0.0538	-0.3748	-0.0722	0.2248
X ₇	1.1565	-0.4998	0.0384	-0.2366	0.5879	-0.9935	-0.2359	-0.5893	0.9289
X ₈	1.2133	-0.0369	0.0332	-0.268	-0.4401	0.5272	-0.1629	0.0091	-0.6618

puede deberse a la multicolinealidad, si este es el caso deben preferirse los resultados de la especificación homogénea, que no tiene un ajuste global inferior, es la más adecuada a la teoría, y está menos afectada por la multicolinealidad.

Los Cuadros 19-22 muestran los resultados de la estimación del Sistema Casi Ideal de Ecuaciones de Demanda en términos per cápita. Como siempre, se realizó la estimación sin la suposición de homogeneidad y luego con ella.

Cuadro 19

**COEFICIENTES DEL SISTEMA CASI IDEAL NO HOMOGÉNEO
CONSUMOS PER CAPITA**

	C	I	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆	P ₇	P ₈
X ₁	0.7081	-0.1184	0.1965	-0.0314	0.0325	0.0128	-0.0256	0.0107	0.0097	-0.1972
		3.0781	8.8124	1.1550	0.6923	0.2910	0.6107	0.4597	0.2886	3.3097
X ₂	0.0019	0.0326	0.0295	0.0292	-0.0237	0.0149	0.0060	0.0005	-0.0337	-0.0337
		1.6243	2.5330	2.0620	0.9676	0.6510	0.2751	0.0393	1.9280	1.0847
X ₃	0.3535	-0.0934	-0.0622	0.0014	0.1042	0.0016	0.0004	-0.0248	0.0017	-0.0133
		12.5240	14.3879	0.2691	11.4487	0.1859	0.0446	5.4789	0.2613	1.1497
X ₄	-0.0940	0.0607	-0.0369	0.0174	-0.0626	0.0149	0.0333	-0.0227	0.0127	0.0343
		5.5707	5.8430	2.2601	4.7103	1.2019	2.8109	3.4243	1.3367	2.0330
X ₅	0.3326	0.0629	-0.0595	-0.0109	0.0059	0.0323	-0.0180	-0.0109	-0.0007	0.0625
		0.2388	3.8979	0.5878	0.1823	1.0748	0.6278	0.6830	0.0296	1.5313
X ₆	-0.0044	0.0478	-0.0299	-0.0191	0.0206	-0.0379	-0.0237	0.0767	-0.0093	0.0280
		2.2895	2.4725	1.2936	0.8087	1.5895	1.0425	6.0487	0.5105	0.8647
X ₇	-0.0738	0.0512	-0.0422	0.0190	-0.0653	-0.0051	-0.0103	-0.0129	0.0194	0.0901
X ₈	0.0818	0.0109	0.0050	-0.0062	-0.0084	-0.0322	0.0357	-0.0173	0.0010	0.0279
		0.5997	0.4748	0.4843	0.3767	1.5491	1.7993	1.5673	0.0607	0.9880

	R ²	F	DW	ES	Σ
X ₁	0.9810	63.0318	1.8882	0.0362	-0.0081
X ₂	0.9821	66.9373	2.8941	0.00189	-0.0110
X ₃	0.9942	207.9351	2.1110	0.00070	-0.0090
X ₄	0.9603	29.6020	2.8416	0.00103	0.0095
X ₅	0.8114	5.2584	1.6848	0.00248	-0.0006
X ₆	0.9942	208.0312	2.9486	0.00197	-0.0054
X ₇	0.7313	3.3269	1.5681	0.00241	0.0074
X ₈	0.9875	96.7761	1.6394	0.00171	-0.0054

Cuadro 20

**COEFICIENTES DEL SISTEMA CASI IDEAL HOMOGENEO
CONSUMOS PER CAPITA**

	C	I	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆	P ₇	P ₈
X ₁	0.6076	-0.0782	0.1806	-0.0139	-0.0194	-0.0245	-0.0184	0.0101	0.0071	-0.1584
		3.7834	9.7449	0.5887	0.9241	0.7565	0.8336	0.4231	0.2072	
X ₂	0.1395	-0.0224	0.0512	0.0053	0.0473	0.0659	-0.0542	0.0014	-0.0301	-0.0868
		1.5876	4.0535	0.3298	3.3093	2.9843	3.5941	0.0842	1.2944	
X ₃	0.2415	-0.0486	-0.0799	0.0209	0.0464	-0.0400	0.0494	-0.0255	-0.0012	0.0299
		5.4972	10.0844	2.0659	5.1758	2.8853	5.2233	2.5042	0.0819	
X ₄	0.0251	0.0131	-0.0180	-0.0033	-0.0011	0.0591	-0.0188	-0.0219	0.0158	-0.0117
		1.2895	1.9866	0.2862	0.1111	3.7264	1.7384	1.8731	0.9422	
X ₅	0.0261	0.0092	-0.0607	-0.0097	0.0022	0.0297	-0.0149	-0.0110	-0.0009	0.0652
		0.6896	5.0932	0.6378	0.1598	1.4243	1.0449	0.7161	0.0394	
X ₆	0.0723	0.0750	-0.0407	-0.0073	-0.0144	-0.0631	0.0061	0.0763	-0.0110	0.0542
		6.4665	3.9160	0.5405	1.2295	3.4739	0.4878	5.7057	0.5768	
X ₇	0.0191	0.0141	-0.0274	0.00283	-0.0173	0.0293	-0.0510	-0.0123	0.0218	0.0542
		0.9671	2.1087	0.1702	1.1779	1.2885	3.2829	0.7368	0.9081	
X ₈	0.0140	0.0378	-0.0056	0.0055	-0.0431	-0.0571	0.0651	-0.0178	-0.0008	0.0538
		3.6472	0.6061	0.4603	4.1016	3.5202	5.8733	1.4872	0.0452	

	R ²	F	DW	ES	t
X ₁	0.9784	67.8448	1.8257	0.00370	0.1466
X ₂	0.9651	41.5183	2.0818	0.00252	0.3747
X ₃	0.9677	44.8776	2.1833	0.00158	0.4682
X ₄	0.8650	9.6148	2.3644	0.00181	0.9387
X ₅	0.8111	6.4416	1.6731	0.00238	0.0524
X ₆	0.9929	210.2841	2.6365	0.00207	0.1003
X ₇	0.6604	2.9168	1.6415	0.00260	0.9268
X ₈	0.9841	92.9219	1.9150	0.00185	0.1670

Cuadro 21

**ELASTICIDADES DEL SISTEMA CASI IDEAL NO HOMOGENEO
CONSUMOS PER CAPITA**

	I	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆	P ₇	P ₈
X ₁	0.7014	-0.5045	-0.0791	0.0820	0.0322	-0.0644	0.0271	0.0244	-0.4972
X ₂	1.4232	0.3824	-0.6207	-0.3076	0.1935	0.0780	0.0062	-0.4373	-0.4376
X ₃	0.2710	-0.4854	0.0111	-0.1868	0.0123	0.0028	-0.1937	0.0132	-0.1039
X ₄	2.0401	-0.6322	0.2980	-1.0732	-0.7440	0.5712	-0.3882	0.2173	0.5878
X ₅	1.1146	-1.0839	-0.1992	0.1067	0.5883	-1.3278	-0.1990	-0.0123	1.1377
X ₆	1.3985	-0.2494	-0.1590	0.1718	-0.3156	-0.1975	-0.3606	-0.0774	0.2331
X ₇	1.9537	-0.7854	0.3534	-1.2163	-0.0958	-0.1925	-0.2412	-0.6391	1.6782
X ₈	1.0981	0.0450	-0.0560	-0.0752	-0.2892	0.0320	-0.1557	0.0087	-0.7496

Cuadro 22

**ELASTICIDADES DEL SISTEMA CASI IDEAL HOMOGENEO
CONSUMOS PER CAPITA**

	I	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆	P ₇	P ₈
X ₁	0.8027	-0.5446	-0.0351	-0.0488	-0.0618	0.0465	0.0254	0.0178	-0.3994
X ₂	0.7093	0.6651	-0.9310	0.6140	0.8556	-0.7040	0.0179	-0.3912	-1.1264
X ₃	0.6205	-0.6237	0.1630	-0.6380	-0.3118	0.3857	-0.1993	-0.0093	0.2336
X ₄	1.2239	-0.3091	-0.0568	-0.0195	0.0130	-0.3229	-0.3750	0.2700	-0.1264
X ₅	1.1669	-1.1046	-0.1764	0.0392	0.5397	-1.2705	-0.1999	-0.0157	1.1882
X ₆	1.6249	-0.3391	-0.0606	-0.1204	-0.5256	0.0504	-0.3643	-0.920	0.4514
X ₇	1.2618	-0.5114	0.0526	-0.3230	0.5460	-0.9505	-0.2300	-0.5944	1.0106
X ₈	1.3396	-0.0506	0.0490	-0.3869	-0.5131	0.5849	-0.1597	-0.0069	-0.5167

Bibliografía

- Arrow, K. J. y F.H. Hahn (1971). *General Competitive*. Holden Day.
- Arrow, K. J. y M.D. Intriligator (1984). *Handbook of Mathematical Economics*. Vol II, North Holland.
- Balasko, Y. (1988). *Foundations of the Theory of General Equilibrium*. Academic Press.
- Barten, A. P. (1966). *Theorie en Empirie van een Volledig Stelsel van Vraagvergelijkingen*. Disertation doctoral. Universidad de Rotterdam.
- Barten, A. P. (1969). "Maximum likelihood estimation of a complete system of demand equations". *European Economic Review*, Vol. 1.
- Barten, A. P. y V. Böhm (1984). "Consumer theory". Capítulo 9 de Arrow e Intriligator (1984).
- Brown, A. y A. Deaton (1972). "Surveys in applied economics: models of consumer behavior". *Economic Journal*, Vol. 82.
- Cramer, J. S. (1986). *Econometric Applications of Maximum Likelihood Methods*. Cambridge University Press.
- Deaton, A. S. (1986). "Demand analysis". Cap. 30 en Griliches e Intriligator (1983-1986).
- Deaton, A. S. y J. Muelbauer (1980a). "An almost ideal demand system". *American Economic Review*, Vol. 70.
- Deaton, A. S. y J. Mulbauer (1980b). *Economics and Consumer Behavior*. Cambridge University Press.
- Debreu, G. (1959). *Theory of Value: An Axiomatic Approach of Economic Equilibrium*. Cowles Foundation Monograph 17, Wiley.
- Departamento Nacional de Estadística (1988). *Cuentas Nacionales de Colombia 1965-1986*. División de Edición del DANE.
- Diewert, W. E. (1984). "Duality approaches to microeconomic theory" en Arrow, K. J. y M. D. Intriligator (1984).
- Howe, H. Josep. (1974). *Estimation of the Linear and Quadratic Expenditure Systems: A Cross Section Cost for Colombia*. Tesis. Universidad de Pennsylvania.
- Griliches, Z. and M.D. Intriligator (1983-1986). *Handbook of Econometrics*. Vol. II, North Holland.
- Lau, L. (1984). "Functional forms in econometric model building". Cap. 26 en Griliches and Intriligator (1984).
- Lluch, C. A. A. Powell and R. A. Williams (1977). *Patterns in Household Demand and Saving*. Oxford University Press.
- Mas-Colell, A. (1985). *The Theory of General Economic Equilibrium. A Differentiable Approach*. Cambridge University Press.
- Quandt, R. E. "Computational problems and methods". Cap. 12 de Griliches e Intriligator (1983-1986).
- Philips, L. (1983). *Applied Consumption Analysis*. North Holland.
- Slutsky, E. (1915). "Sulla teoria di bilancio del consumatore". *Giornale Degli Economisti*. Traducción al inglés en Stigler, G. y K. Boulding (1952).

Stigler, G. y K. Boulding (1952). *Readings in Price Theory*. Irwin.

Stone, J. R. N. (1954). "Linear expenditure system and demand analysis: and application to the pattern of British demand". *Economic Journal*, Vol. 64.

Theil, H. (1965). "The information approach to demand analysis". *Econometrica*, Vol. 33.

Theil, H. (1980). *The System-Wide Approach to Microeconomics*. University of Chicago Press.

Varian, H. (1984). *Microeconomic Theory*.