

Caos: Definición, Detección y Ejemplos

*Rocio Ribero Medina**
*Manuel Ramírez Gómez***

I. Introducción

La Teoría del Caos ha sido desarrollada durante las dos últimas décadas por científicos de muy diversas ramas que se han unido en el intento de explicar de un modo diferente la complejidad de la Naturaleza. Ha sido implementada en ciencias como la Física, la Biología, la Meteorología y la Economía, específicamente en problemas como la evolución de reacciones químicas, el control de retroalimentación de circuitos eléctricos, la respuesta de células cardíacas a impulsos eléctricos, la interacción de poblaciones biológicas, los sistemas laser, la carrera armamentista entre naciones y las variaciones de los precios en la Economía, entre otros.

Contrario a lo que se podría pensar por la connotación usual que tiene la palabra Caos (en el lenguaje común caos es un estado de confusión y desorden en que se suponen los elementos de la Naturaleza, antes de su ordenación en un cosmos regulado por las leyes físicas) la Teoría del Caos constituye una nueva Ciencia que intenta mostrar que existe orden y pauta en situaciones en las que antes sólo se observaba el azar, lo impredecible, lo irregular.

Los métodos que se utilizan en Economía para predecir el futuro quedan con esta nueva Teoría radicalmente cuestionados. Donde ocurre Caos se hace muy difícil extrapolar o estimar un modelo estructural de proyección, pues un minúsculo error en

* Matemática, Universidad Javeriana. Magister en Economía, Universidad de los Andes.

** Ingeniero Civil, Universidad Javeriana. Magister y Ph.D. en Economía, Yale University. Profesor-Investigador, Facultad de Economía. Universidad de los Andes.

una cifra decimal de un parámetro puede cambiar notablemente el carácter de la predicción.

La Teoría del Caos muestra que una relación determinística sencilla pero no lineal, puede generar una trayectoria dinámica extremadamente compleja que parece aleatoria.

De esta manera es posible que el término aleatorio e que se suele colocar en las estimaciones econométricas no sea de hecho aleatorio aunque así lo parezca.

El Caos se enmarca dentro de la Teoría de determinación de los mecanismos dinámicos que pueden generar las series de tiempo económicas. Muchos de los modelos macroeconómicos son lineales o logarítmico-lineales, pero si realmente se puede rechazar la hipótesis nula de que el mecanismo generador sea lineal, entonces esos modelos pueden estar erradamente especificados.

El supuesto por ejemplo de que los agentes económicos forman sus expectativas basados en proyecciones lineales puede ser una representación muy pobre de comportamiento racional si el proceso es generado por un mecanismo no lineal, como lo indican Ashley y Patterson (1989).

Las propiedades características que generan las trayectorias caóticas son las siguientes:

a) Una trayectoria puede tener cambios cualitativos abruptos como los que se suelen asociar con cambios aleatorios, de modo que algunas pruebas típicas de azar no pueden distinguir entre patrones caóticos y otros de comportamiento puramente aleatorio.

b) Las trayectorias son extremadamente sensibles a cambios microscópicos en el valor de los parámetros. Un cambio por ejemplo en la quinta cifra decimal de un parámetro puede transformar completamente el carácter de la trayectoria.

c) Las trayectorias nunca vuelven a un punto por el que hayan pasado anteriormente, pero se mantienen en una región limitada, con un patrón oscilatorio muy desordenado.

La Teoría del Caos nos advierte que comportamientos aparentemente aleatorios pueden no serlo en realidad, demostrando así los peligros de la extrapolación y de la predicción económica en general. Además ha servido de base para desarrollar modelos simples de comportamiento de agentes racionales que pueden llevar a efectos muy complejos, ha ofrecido nuevas perspectivas sobre fuentes económicas de oscilaciones en varios modelos (Brock (1988)), y ha servido de pie para modelos de "conducta de aprendizaje" y de generaciones que se traslapan.

En el artículo, que se dividirá en tres numerales principales, se hará una exposición detallada de cómo se generan estas trayectorias para un caso particular sencillo, luego se verá un modelo económico en el que se presenta Caos, y finalmente se hará una revisión de uno de los métodos para detectar el Caos en series de tiempo económicas.

1. ¿Qué es el caos?

La manera en que un fenómeno presenta fluctuaciones en el tiempo es a menudo descrita por una ecuación diferencial o una ecuación de diferencias.

Una de las situaciones más simples es, por ejemplo, cuando una observación de un fenómeno en el período $n+1$ es una función de la observación del período n , que se puede expresar en general como:

$$X(n+1) = F[X(n)] \quad (1)$$

donde $F[X]$ sea una ecuación de diferencias no lineal y de primer orden.

Ejemplos de estas situaciones se encuentran en Biología, Genética o Epidemiología, pero la ecuación (1) también puede describir situaciones económicas en modelos que relacionan precios y cantidades de un bien, en modelos de ciclos económicos o en series de tiempo generadas por otras variables económicas.

En general, en cualquiera de estos contextos, se considera que la función F tiene las siguientes propiedades:

- a) $F(0) = 0$.
- b) $F(X)$ crece monotónicamente en un rango $0 < X < C$.
- c) $F(X)$ decrece monotónicamente desde $X = C$ en adelante.
- d) El recorrido de F está incluido en su dominio.

Además F incluye algunos parámetros con significado biológico o económico que son los que determinan su pendiente y la ubicación de su máximo.

Algunas de las formas funcionales más utilizadas para generar el comportamiento caótico son las siguientes:

$$F(X) = aX(1-X) \quad \text{Función Logística} \quad (2)$$

$$F(X) = X \exp[r(1-X)] \quad \text{Función Exponencial Logística}$$

$$F(X) = \begin{cases} aX & \text{si } X < 0.5 \\ a(1-X) & \text{si } X \geq 0.5 \end{cases} \quad \text{Función Triangular}$$

$$F(X) = \begin{cases} \alpha X & \text{si } X < 1 \\ 1-b & \text{si } X \geq 1 \end{cases} \quad \text{Función de dos parámetros} \\ \text{con } 0 < b < 1, \text{ y } \alpha > 0.$$

$$F(X) = X + aX(X^2-1) \quad \text{Función Cúbica}$$

Para el análisis que se hace a continuación sólo se considera la ecuación (2), por ser la más sencilla de manejar.

En situaciones prácticas $X \geq 0$ para lo cual se requiere que $0 \leq X \leq 1$. El máximo de $F(X)$ está ubicado en $X = 0.5$, donde F toma el valor de $a/4$. Luego para que $X \in (0,1)$ debe darse que $a/4 \in (0,1)$, o sea que $a \in (0,4)$, lo cual garantiza que al aplicar F repetidamente el resultado siga en el intervalo $(0,1)$.

Se puede probar que según varíe el parámetro "a" se da:

- 1) si $0 \leq a \leq 1$ entonces todas las trayectorias son atraídas a $X = 0$.
- 2) si $1 < a < 3$ entonces hay un punto de equilibrio estable diferente de $X = 0$, que atrae hacia él todas las trayectorias. Tal punto constituye el atractor del sistema.
- 3) si $3 \leq a \leq 4$ entonces el equilibrio se torna inestable y aparece la posibilidad de Caos. En este caso surgen dos puntos entre los que el sistema alterna en un ciclo estable de período dos. El punto de acumulación de esos ciclos de período 2^n que limita el proceso se da cuando "a" = 3.57, como lo prueba May (1976), habiendo algunos valores de "a" mayores que 3.57 para los que se presenta Caos y otros para los que se dan de nuevo los ciclos estables de período 2.

Para los valores de "a" que presentan Caos hay un número infinito de puntos fijos de diferentes periodicidades y un número infinito de ciclos periódicos. También hay un número incontable de puntos iniciales X_0 que generan trayectorias totalmente aperiódicas pero acotadas, de modo que para cualquier longitud de la serie de tiempo generada por $F(X)$ no hay un patrón que se repita.

El análisis dinámico de F se hace en el Gráfico 1 trazando sobre la misma figura de $F(X)$ la diagonal $(X(t+1) = X(t))$ y efectuando el siguiente proceso:

El punto inicial X_0 tiene una imagen por F que es $F(X_0) = X_1$. Este X_1 se proyecta horizontalmente a la diagonal y se busca su imagen por F que es $F(X_1) = X_2$.

Este X_2 se proyecta horizontalmente sobre la diagonal y se busca su imagen por F que es $F(X_2) = X_3$.

Lo mismo se hace ahora con X_3 , y así sucesivamente. Así se obtiene una trayectoria $\{X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, \dots\}$ que se grafica en un plano de X contra el tiempo. Numéricamente se parte del valor inicial X_0 y se coloca cada resultado como entrada para obtener el siguiente.

A continuación se presenta la descripción gráfica y numérica de cinco casos para diversos valores del parámetro "a". La Función Logística correspondiente a cada caso aparece en el Gráfico 2.

Gráfico 1
FUNCION LOGISTICA GENERAL

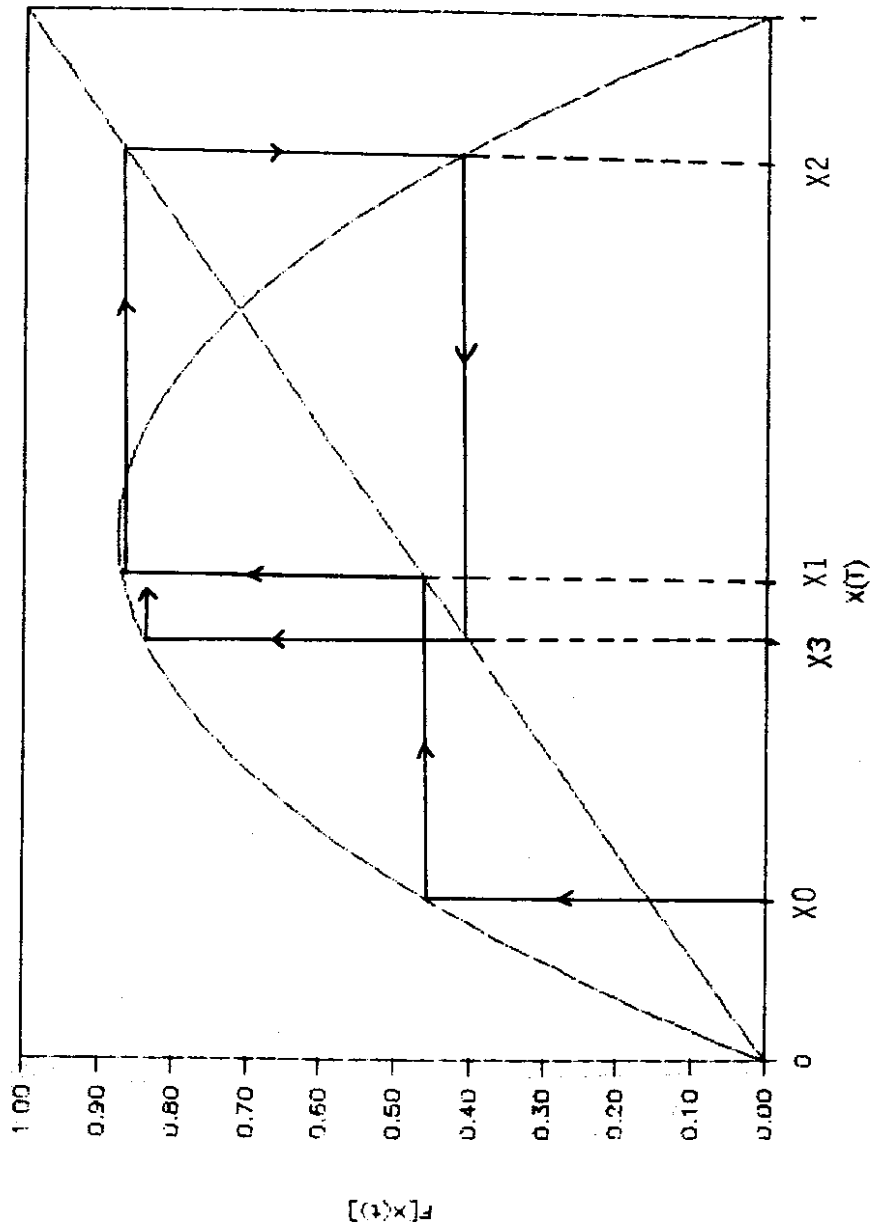
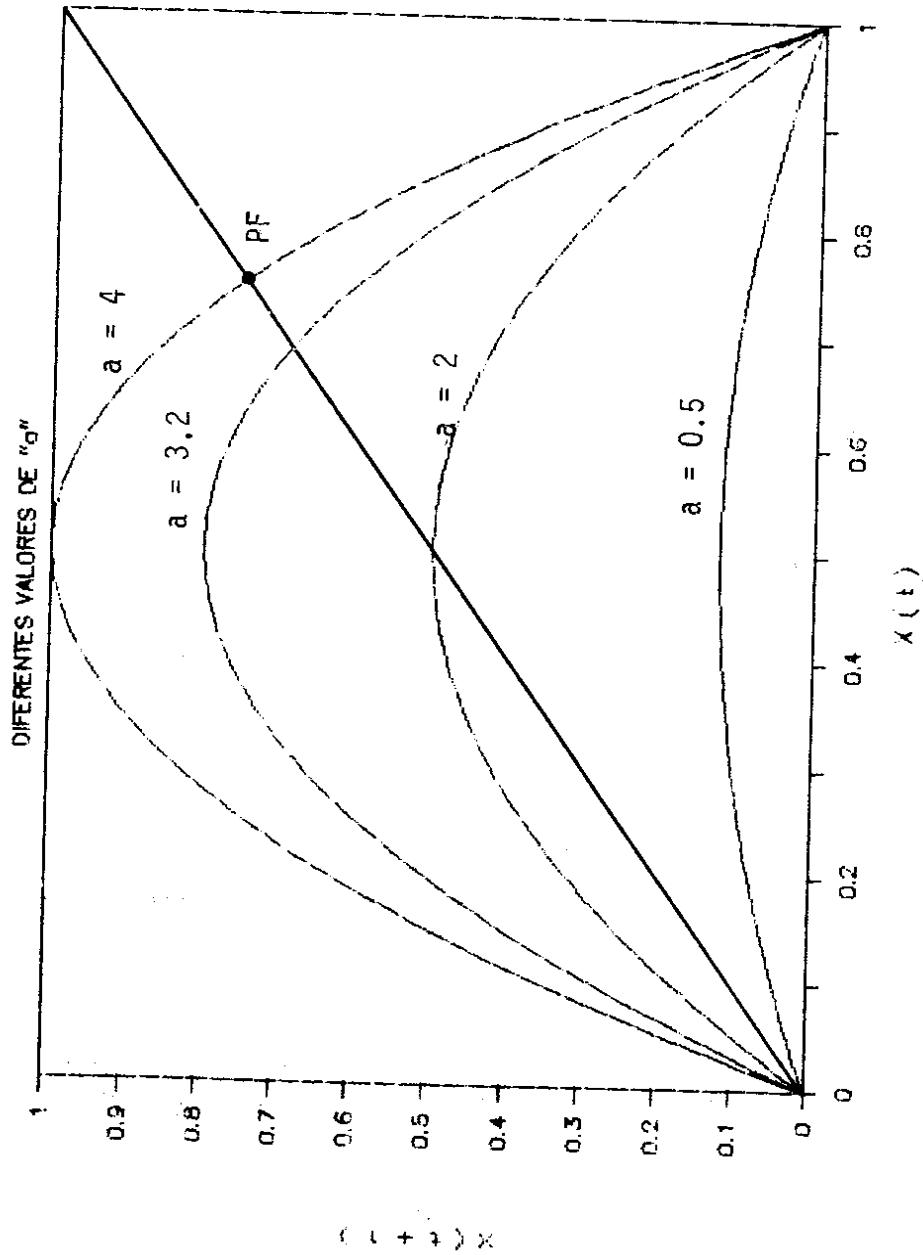


Gráfico 2

FUNCION LOGISTICA



Caso i

Con los parámetros $a = 0.5$ y $X_0 = 0.25$, la ecuación (2) queda:

$$X(t+1) = 0.5 X(t) [1-X(t)] \quad (3)$$

El máximo está en $a/4 = 0.125$ para $X = 0.5$. El único punto fijo es $X = 0$. (Puntos fijos son donde el gráfico de F corta la diagonal principal como el punto PF que se observa en el Gráfico 2).

Para cualquier punto inicial $X_0 \in (0,1)$ se debe dar que $F(X_0) < X_0$ de manera que cada vez que se aplica F el resultado es más cercano a $X = 0$. Por esto la trayectoria es atraída hacia cero, como se puede observar en el Cuadro 1.

El hecho de que la trayectoria tienda a cero significa que el punto $\{0\}$ es el atractor.

En el Gráfico 3 se observa la trayectoria que se obtiene del proceso dinámico.

Caso ii

Con los parámetros $a = 2$ y $X_0 = 0.25$ la ecuación (2) queda:

$$X(t+1) = 2X(t) [1-X(t)] \quad (4)$$

El máximo se encuentra en $X=0.5$, donde toma el valor de $a/4=0.5$. Además del punto fijo $X = 0$ está también el punto fijo $X = 0.5$.

Desde cualquier punto inicial la trayectoria siempre tiende al punto fijo $X=0.5$, así como ocurre en la trayectoria que parte de $X_0=0.25$, que se muestra en los datos numéricos presentados en el Cuadro 1. La trayectoria dinámica correspondiente aparece en el Gráfico 3.

En este caso se dice que la trayectoria es superestable, ya que al cabo de pocas iteraciones llega a un punto fijo, de donde ya no puede salir.

El atractor está constituido en esta ocasión por el punto $\{0.5\}$.

Caso iii

Con los parámetros $a = 3.2$ y $X_0 = 0.25$ la ecuación (2) queda:

$$X(t+1) = 3.2X(t) [1-X(t)] \quad (5)$$

El máximo toma el valor $a/4=0.8$ para $X=0.5$. El punto fijo diferente de $X=0$ es $X = 0.6875$. Se observa la aparición de dos nuevos e inicialmente estables puntos fijos que provienen de una primera bifurcación del punto fijo. Luego, a partir de cada uno de ellos habrá una nueva bifurcación, y así sucesivamente. Son esos los ciclos de período 2^n de los que se habló anteriormente.

Cuadro 1
FUNCION LOGISTICA

t	X1(t)	X2(t)
0	0.25	0.25
1	0.09375	0.375
2	0.042480	0.46875
3	0.020337	0.498046
4	0.009962	0.499992
5	0.004931	0.499999
6	0.002453	0.5
7	0.001223	0.5
8	0.000611	0.5
9	0.000305	0.5
10	0.000152	0.5
11	0.000076	0.5
12	0.000038	0.5
13	0.000019	0.5
14	0.000009	0.5
15	0.000004	0.5
16	0.000002	0.5
17	0.000001	0.5
18	0.000000	0.5
19	0.000000	0.5

X1(t) corresponde a $a = 0.5$

X2(t) corresponde a $a = 2$

En el Cuadro 2 se nota la aparición de estos ciclos como también en el Gráfico 4 de la trayectoria dinámica.

Caso iv

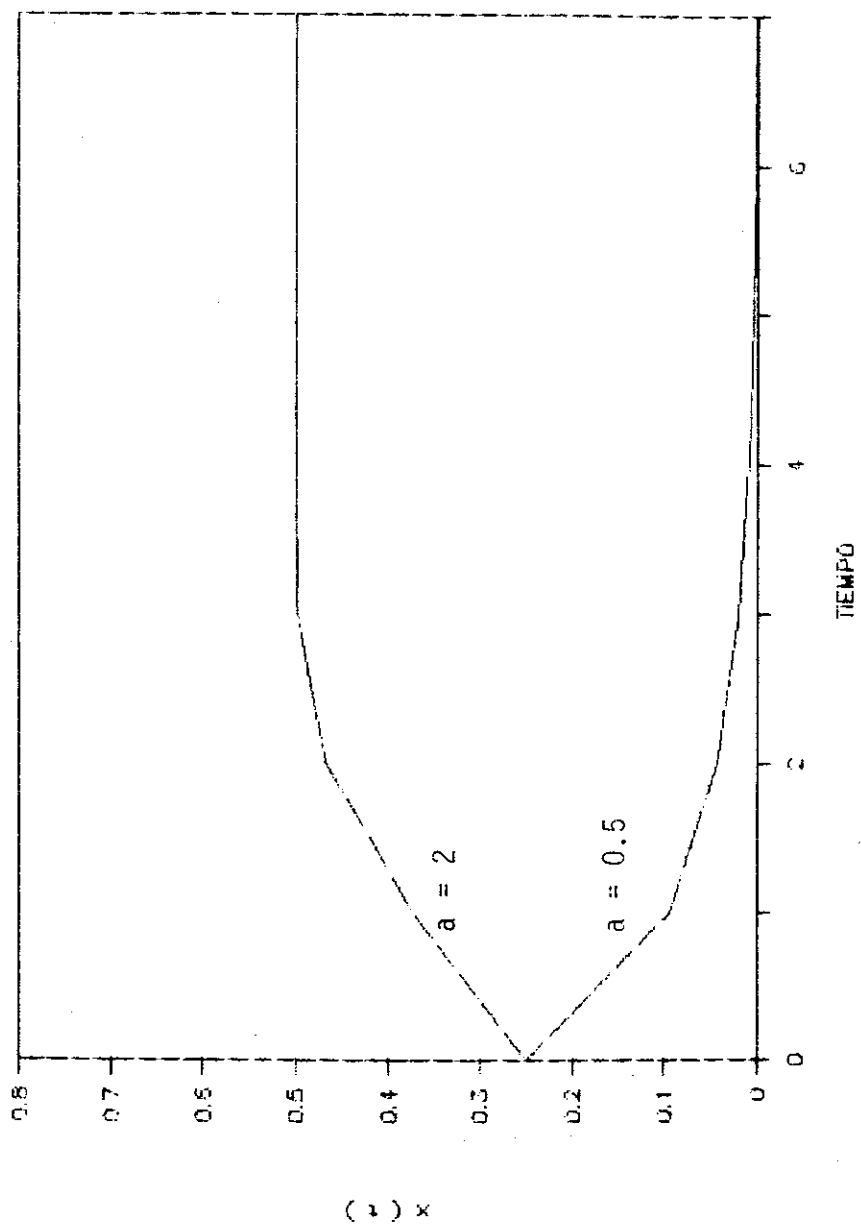
Con $a = 4$ y $X_0 = 0.26$ tenemos:

$$X(t+1) = 4X(t) [1 - X(t)] \quad (6)$$

El máximo está en $X=0.5$ y toma el valor de $a/4=1$. Hay un punto fijo diferente de $X=0$ que es $X=0.75$. Este es el caso de una trayectoria caótica, con un atractor "extraño" que ya no está formado por puntos aislados sino que abarca toda una región limitada pero con infinitos puntos, y donde los números parecen ser puramente aleatorios (ver Cuadro 2), pero vienen del proceso determinístico que describe la ecuación (6).

Gráfico 3

TRAYECTORIA LOGISTICA



Cuadro 2
FUNCION LOGISTICA

t	X1(t)	X2(t)
0	0.25	0.26
1	0.6	0.7696
2	0.768	0.709263
3	0.570163	0.824835
4	0.784246	0.577927
5	0.541452	0.975708
6	0.794501	0.094803
7	0.522460	0.343264
8	0.798385	0.901735
9	0.515091	0.354433
10	0.799271	0.915241
11	0.513397	0.310298
12	0.799425	0.856053
13	0.513101	0.492902
14	0.799450	0.999798
15	0.513053	0.000805
16	0.799454	0.003220
17	0.513045	0.012840
18	0.799455	0.050700
19	0.513044	0.192521

X1(t) corresponde a $a = 3.2$

X2(t) corresponde a $a = 4$

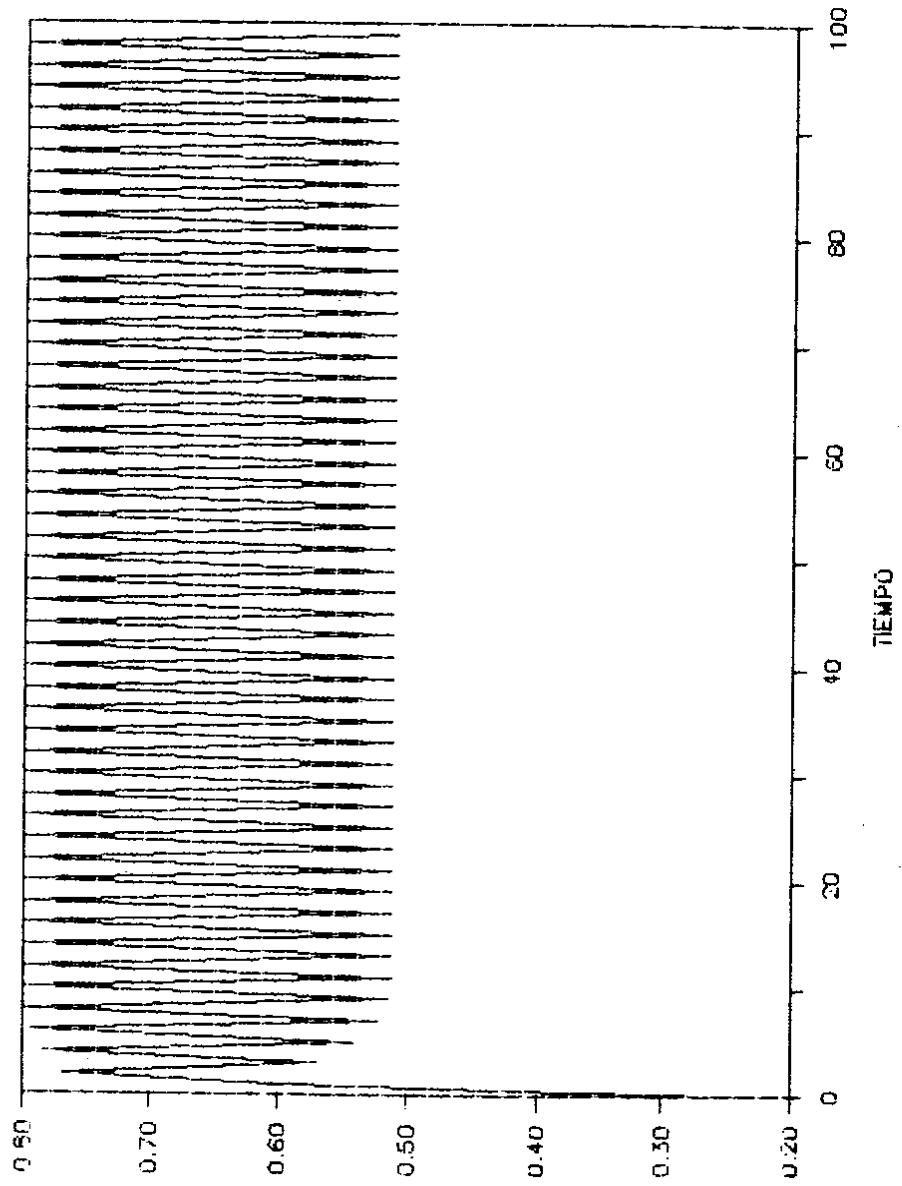
Gráficamente es clara la apariencia de ruido de esta trayectoria, totalmente desordenada pero dentro de un intervalo que la limita, sin repetir nunca un punto por el que haya pasado anteriormente (ver Gráfico 5).

La extrema sensibilidad a variaciones pequeñas en las condiciones iniciales se puede observar en el Gráfico 6 que muestra superpuestas las trayectorias correspondientes a este caso que parten de 0.301 y de 0.300.

Las trayectorias caóticas también se ven muy afectadas por variaciones mínimas en los parámetros, como lo comprueba Butler (1990), quien analiza la función logística con $a=3.82844$ y con $a=3.8284$ obteniendo dos trayectorias enteramente diferentes para el mismo punto inicial $X_0 = 0.0101$.

Gráfico 4

TRAYECTORIA DE X PARA A = 3.2



32

Gráfico 5

TRAYECTORIA DE X PARA "a"

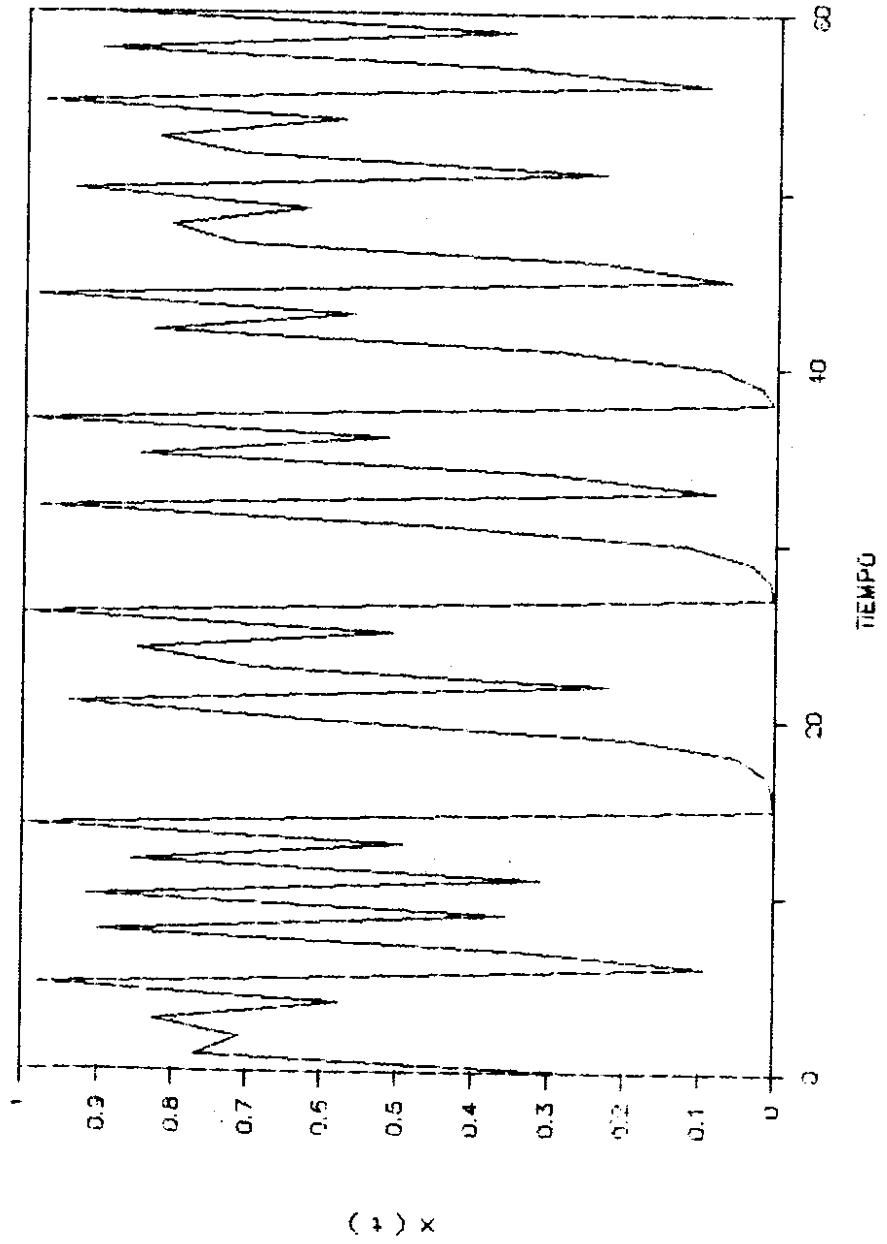
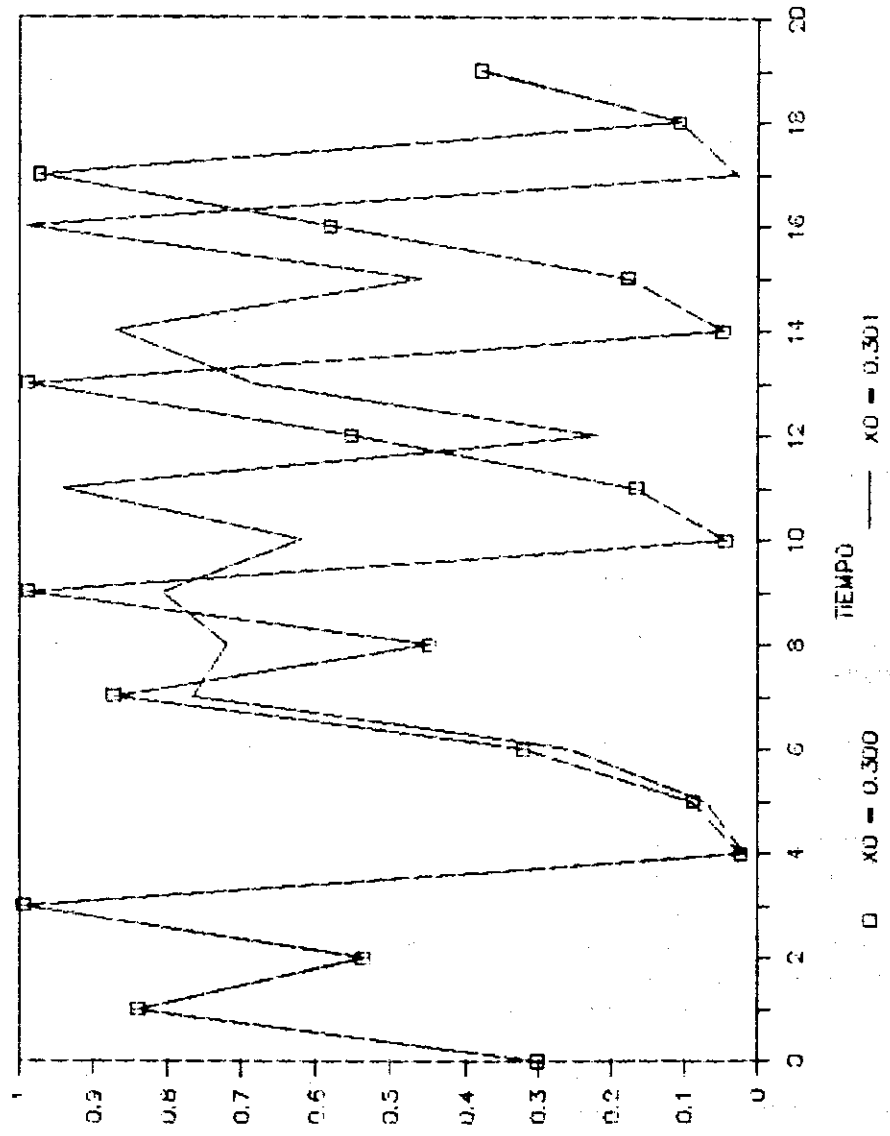


Gráfico 6
TRAYECTORIA DE X PARA "a"



(*) X

2. Modelo económico con Caos

Un modelo keynesiano no lineal

En un modelo macroeconómico típico de precio fijo, puede generarse fácilmente un comportamiento caótico, como lo muestran Ashley y Patterson (1989).

Un modelo específico de este tipo es el representado por las ecuaciones siguientes:

$$Y(t+1) = C[Y(t)] + I[r(t)] + A \quad Y(0) = Y \text{ capacidad}$$

Identidad de Y (7)

$$C[Y(t)] = \beta Y(t) \quad \text{con } 0 < \beta < 1$$

Función Consumo (8)

$$I[r(t)] = \begin{cases} \{\mu[r^* - r(t)]\}/r(t) & \text{si } 0 \leq r(t) \leq r^* \\ 0 & \text{si } r(t) > r^* \end{cases}$$

(9)

Función Inversión

$$M(t) = kY(t) + \delta/[r(t) - r^-] \quad \text{con } r(t) \geq r^- \geq 0$$

Función de Demanda de Dinero (10)

en donde Y = ingreso, C = consumo, I = inversión, r = tasa de interés, A = demanda agregada autónoma y M = cantidad de dinero.

En este modelo r^* es la tasa de interés máxima a partir de la cual la inversión es nula, dado el comportamiento de los inversionistas ante una tasa de interés muy alta.

Similarmente r^- es la tasa de interés mínima para que la demanda de dinero (liquidez) no sea infinita.

Este modelo es consistente con la presentación usual de los libros de texto del modelo IS-LM, ya que la función (9) implica una curva IS con pendiente negativa, y la función (10) una curva LM con pendiente positiva.

Day y Shafer (1985) dan las condiciones suficientes para que la serie $\{Y(t)\}$ sea caótica, eligiendo los parámetros siguientes:

Y(0) = 100	r* = 0.25	δ = 4.8
A = 13	r^- = 0.01	
β = 0.7	M = 40	
μ = 500	k = 0.2	

Si en el modelo formado por las ecuaciones (7) a (10) se reemplazan los parámetros anteriores y de ahí se despeja $Y(t+1)$ se llega a la ecuación:

$$Y(t+1) = \frac{[2467.6 - 20.386 Y(t) - 0.0014 Y^2(t)]}{[5.2 - 0.002 Y(t)]} \quad \text{si } r < 0.25$$

$$0.7 Y(t) + 13 \quad \text{si } r > 0.25 \quad (11)$$

que caracteriza la dinámica del modelo.

Cuando $Y(t+1)=Y(t)$ se da la condición de estado estacionario, la cual se resuelve también algebraicamente y se obtienen los valores:

$$Y = 96.7 \quad C = 67.7$$

$$I = 16 \quad r = 0.24$$

caracterizando una economía de alta producción y alta tasa de interés.

Ashley y Patterson (1989) simularon este modelo para 456 períodos mensualmente. Los primeros 100 valores del $Y(t)$ resultante aparecen en el Gráfico 7.

La serie parece ruido estacionario no gaussiano, y sería modelada como un AR(4), y sin embargo se ha visto cómo proviene de un modelo determinístico no lineal.

Existen varios ejemplos de este tipo, desarrollados por autores como Grandmont (1985,1986), Boldrin y Montrucchio (1986), Benhabib y Day (1981), y Baumol y Benhabib (1989), todos ellos no lineales, determinísticos de dinámica caótica que generan series de apariencia estocástica.

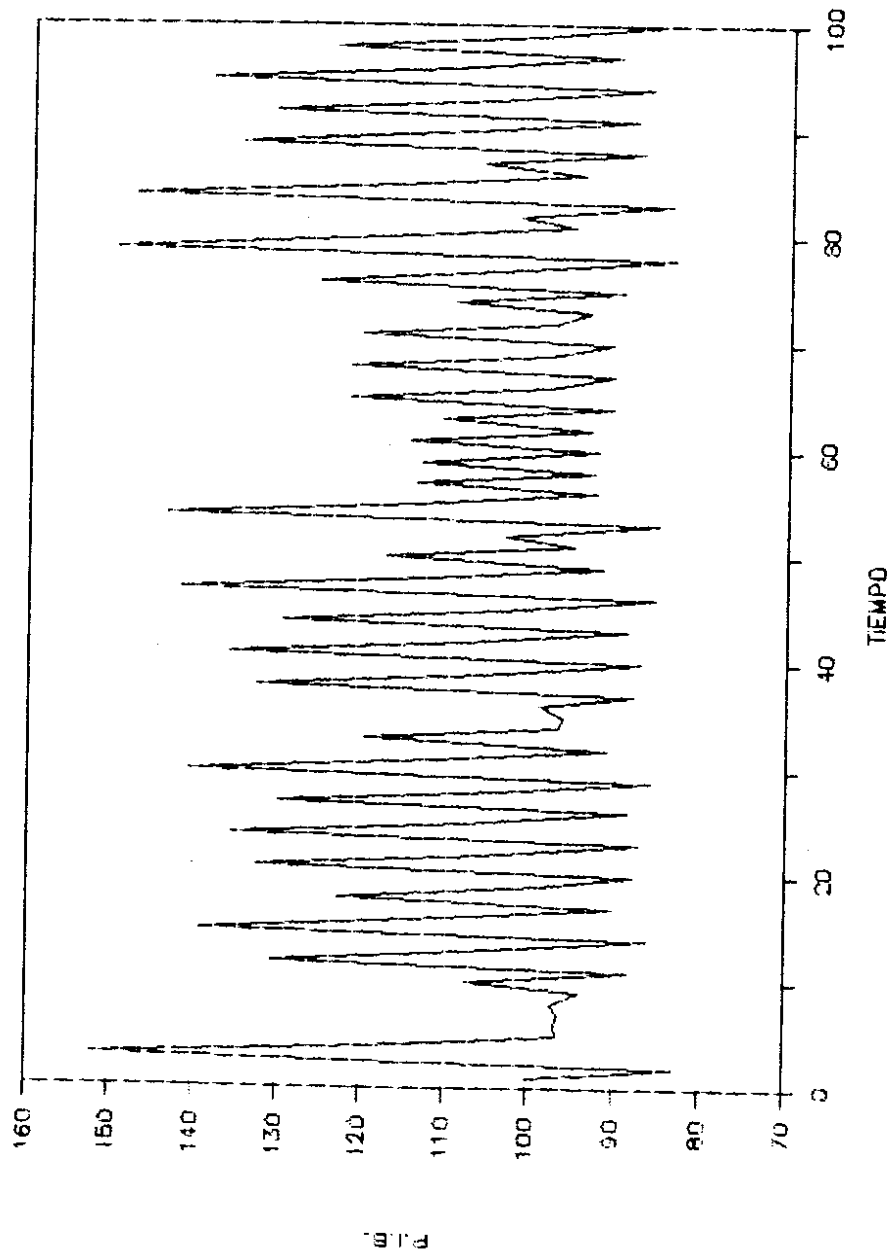
En particular Grandmont (1985) desarrolló un modelo macroeconómico caótico determinístico que implica conclusiones de política económica sustancialmente diferentes de las de los modelos típicos de expectativas racionales.

Allí los ciclos económicos surgen del conflicto existente entre el efecto riqueza y el efecto sustitución intertemporal asociados con los movimientos de la tasa real de interés, es decir que los ciclos no son exógenos ni se deben a cambios deliberados en la política económica, lo que conduce a diferencias notorias en las conclusiones de política económica que se deberían seguir.

Ya desde los trabajos de Goodwin, Harrod, Hicks y Kalecki se encuentran analizados estos ciclos generados endógenamente en modelos macroeconómicos a través de la interacción del multiplicador del consumo y el de la inversión.

Sin embargo, el hecho de que la dinámica interna (no lineal) de una economía pueda generar trayectorias determinísticas caóticas, y de que éstas sean difíciles de distinguir de otras "verdaderamente aleatorias" a través de pruebas lineales estadísticas, ha jugado un papel crucial en el renacimiento del estudio de la teoría de los ciclos económicos.

Gráfico 7
SERIE DE TIEMPO DEL P.I.B.



Esta corriente ha sido retomada recientemente con un análisis de la manera en que las expectativas interactúan con la dinámica interna de la economía para generar fluctuaciones autónomas, en particular por autores como Grandmont y Malgrange (1986). Así se revive la idea keynesiana de que los ciclos económicos son causados por “espíritus animales” o por “psicología del mercado”.

También se ha visto que la dinámica determinística compleja puede surgir en modelos de duopolio con horizonte infinito, como lo muestran Dana y Montrucchio en “Dynamic Complexity in Duopoly Games” (1986), o en modelos neoclásicos de crecimiento óptimo para bajas tasas de descuento, lo cual encontramos en el artículo de Boldrin y Montrucchio “On the Indeterminacy of Capital Accumulation Paths” (1986).

3. ¿Cómo se detecta el Caos?

La posibilidad de llegar a trayectorias caóticas en sistemas dinámicos no lineales lleva naturalmente a la pregunta empírica de cómo distinguir tales trayectorias de otras series de tiempo realmente aleatorias.

El tópico de la detección ha atraído mucha atención y científicos de diversas disciplinas han computado varios estadísticos para medir el Caos. Una revisión de procedimientos utilizados en otras ciencias extendidos para cubrir casos de interés económico, la encontramos en el artículo de Brock “Distinguishing Random and Deterministic Systems” (1986).

En un sistema caótico la predicción a largo plazo es imposible, porque la incertidumbre siempre presente en determinar su estado inicial crece exponencialmente rápido en el tiempo. La rápida pérdida de poder de predicción es debida a la propiedad de que las trayectorias que parten de dos condiciones iniciales vecinas divergen exponencialmente rápido. En sistemas no caóticos, por el contrario, órbitas vecinas o bien convergen exponencialmente rápido, o bien presentan diferencias menores que la divergencia exponencial de modo que al menos teóricamente es posible la predicción a largo plazo.

En este numeral se presenta un método para detectar el Caos por medio de exponentes de Lyapunov aplicado a una serie de tiempo empírica, aunque existen también otros métodos tales como la Dimensión de Correlación, la Entropía de Kolmogorov (Brock y Magliaris (1989)) y el Biespectro Estimado (Ashley y Patterson (1989)).

Exponente de Lyapunov

Sea $X(n)$ una variable X en el tiempo que se comporta como lo describe la ecuación (1) y sea $dX(n)$ el error en especificar $X(n)$ que es lo que se quiere medir. Se tiene que :

$$\begin{aligned} X(n+1) + dX(n+1) &= F[X(n) + dX(n)] \\ &\approx F[X(n)] + F'[X(n)]dX(n) \end{aligned} \tag{12}$$

lo que resulta de despejar $F(X(n)+dX(n))$
 en el cociente diferencial $[F(X(n) + dX(n)) - F(X(n))]/dX(n) \approx F'(X(n))$,
 de donde $F(X(n) + dX(n)) - F(X(n)) \approx F'(X(n))dX(n)$,
 y entonces $F(X(n) + dX(n)) \approx F(X(n)) + F'(X(n))dX(n)$.

Luego como $X(n+1)=F[X(n)]$ al reemplazar en (12) tenemos que:

$$F[X(n)] + dX(n+1) \approx F[X(n)] + F'[X(n)]dX(n)$$

y al cancelar a ambos lados de la equivalencia $F[X(n)]$ se obtiene:

$$dX(n+1) \approx F'[X(n)]dX(n).$$

De igual manera se puede despejar $dX(n)$, $dX(n-1)$,..., resultando

$$\begin{aligned} dX(n+1) &\approx F'[X(n)]dX(n) \\ &\approx F'[X(n)]F'[X(n-1)]dX(n-1) \\ &\approx \dots \quad \text{luego} \end{aligned}$$

$$dX(n+1) \approx \left\{ \prod_{j=0}^{n-1} F'[X(j)] \right\} dX(0) \quad (13)$$

$$\text{Si} \quad \left| \left\{ \prod_{j=0}^{n-1} F'[X(j)] \right\} \right| > 1 \quad (14)$$

la incertidumbre $|dX(n)|$ tiende a crecer en el tiempo. Asumir que esta incertidumbre crece exponencialmente rápido implica que, por definición, la ecuación (14) sea consistente con:

$$dX(n) \approx dX(0)[2\exp(\Phi n)]$$

donde Φ es por definición el exponente de Lyapunov.

De ahí que :

$$2 \exp(\Phi n) \approx \prod_{i=0}^{n-1} F'[X(i)] \quad (15)$$

luego tomando a ambos lados de la ecuación logaritmos en base 2

$$\Phi_n \approx \sum_{i=0}^{n-1} \log_2 F' [X(i)]$$

y por lo tanto

$$\Phi \approx 1/n \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \log_2 F' [X(i)] \right\}$$

Tomando el límite cuando n tiende a infinito tenemos la igualdad

$$\Phi = \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \log_2 F' [X(i)] \right\}$$

Nótese que de la ecuación (15) para que se de (14) basta que $\Phi_n > 0$, y como $n > 0$ entonces la condición de crecimiento exponencial de la incertidumbre se da siempre que $\Phi > 0$, o sea cuando el exponente de Lyapunov es positivo.

Se toma $\lim_{n \rightarrow \infty}$ para obtener una cantidad que describa el comportamiento a largo plazo y que sea independiente de las condiciones iniciales. El valor de Φ cuantifica la tasa promedio de pérdida de poder de predicción.

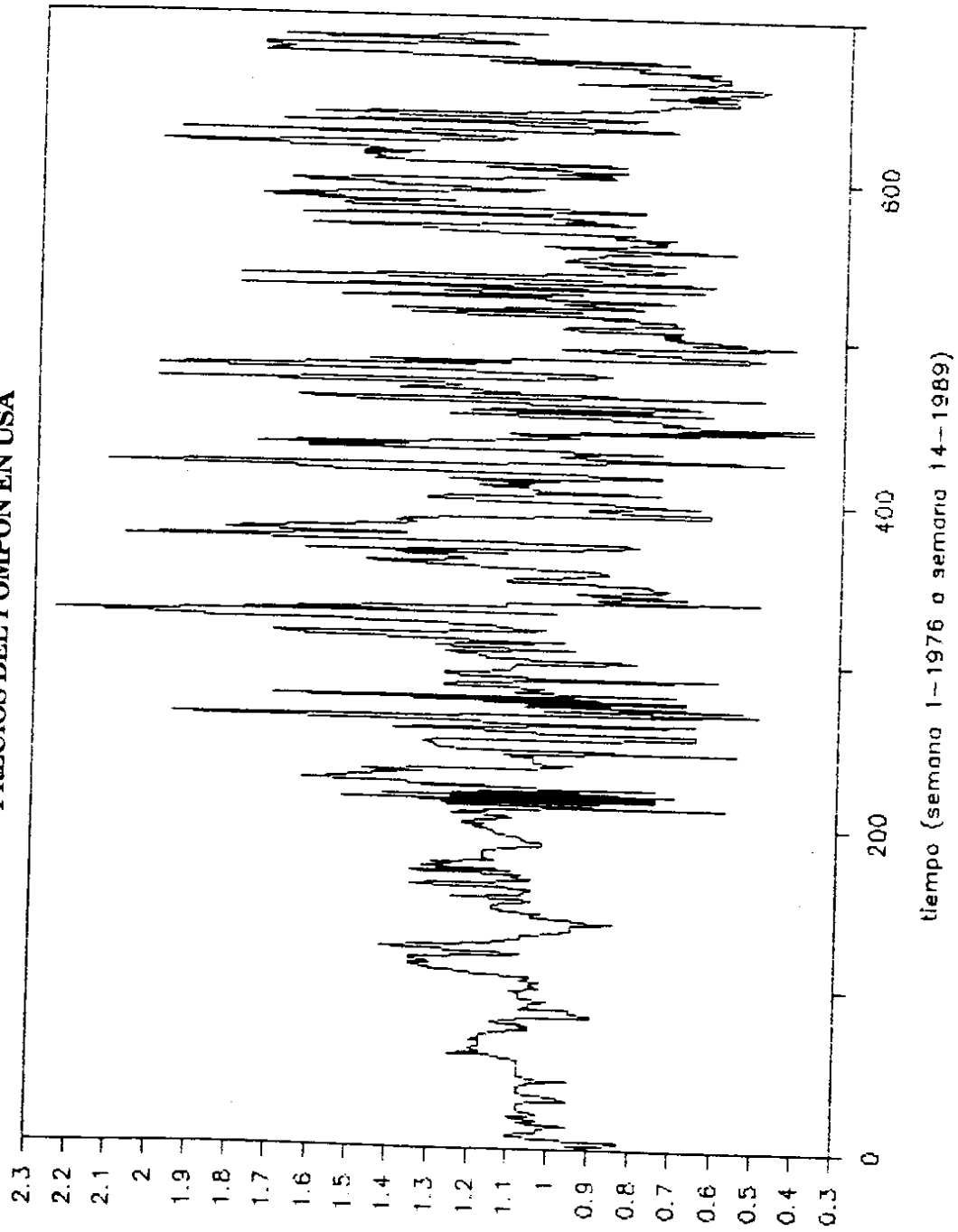
Un sistema con exponente de Lyapunov positivo se define como caótico, y la magnitud del exponente refleja la escala de tiempo en que la dinámica del sistema se torna impredecible, o sea la tasa a la que el sistema crea información. Así, si un punto inicial es especificado con una precisión de 16 bits y el exponente de Lyapunov mide 1, entonces después de 16 iteraciones el sistema produce información y queda totalmente perdida la capacidad de predicción. Si el exponente de Lyapunov mide 2 significa que a las 8 iteraciones la pequeña incertidumbre inicial cubrirá todo el sistema.

Sin embargo calcular exponentes de Lyapunov no es tan directo como aplicar la fórmula que los define, pues en general no se conoce el mecanismo generador representado por F. Cuando se tiene una serie de datos experimentales y se intenta averiguar si ella refleja un comportamiento caótico, se debe recurrir a métodos más complejos.

Es por esto que se han ideado diversos métodos para calcular exponentes de Lyapunov, de los cuales se utilizó el descrito por Wolf y otros (1985). Con este método, actualizado gracias a correspondencia directa con Wolf (1991) y con una serie de tiempo de 690 observaciones (veáse Gráfico 8) se trató de determinar la existencia de conductas caóticas en los precios de exportación de las flores colombianas, en particular para la serie del pompón que fue la más larga con que se contó.

Gráfico 8

PRECIOS DEL POMPON EN USA



La serie corresponde a los precios FOB semanales de los pompones colombianos que entran a Estados Unidos por el aeropuerto de Miami. Este precio se forma en los Estados Unidos dependiendo de factores de oferta como las estructuras de producción y comercialización, y de factores de demanda como las fechas conmemorativas de los Estados Unidos (San Valentín, Independencia, Navidad, etc.).

Tal serie fue modelada por Camacho (1990) para el período 1980-1989 obteniendo como resultado un modelo ARIMA (1, 0, 0) (3, 0, 0) dado por:

$$X(t) = 1.06 + 0.72X(t-1) + 0.14X(t-52) + 0.17X(t-104) + 0.13X(t-156) + e$$

(13.45) (18.1) (2.39) (2.77) (1.90)

$$Q(\text{Box-Cox}) = 59.88 \quad \text{nivel de significancia} = 0.27$$

(Los números entre paréntesis debajo de cada coeficiente son los valores de la t-Student).

El procedimiento utilizado por Wolf y otros (1985) se basa en tomar la serie de tiempo y reconstruir un espacio de fase, monitoreando la evolución a largo plazo de dos órbitas vecinas.

El programa codificado en FORTRAN aparece en Wolf y otros (1985) y consiste básicamente en realizar los siguientes pasos (véase Gráfico 9):

- Dada la serie de tiempo $X(t)$ se construye un atractor cuyos puntos están dados por $\{X(t), X(t+\tau), \dots, X(t+(m-1)\tau)\}$ donde τ es el tiempo de dilatación arbitrariamente escogido.

Para el caso particular de análisis de la serie del pompón se tomó $\tau = 1$ y $m = 2$, luego los puntos del atractor son de la forma $\{X(t), X(t+1)\}$.

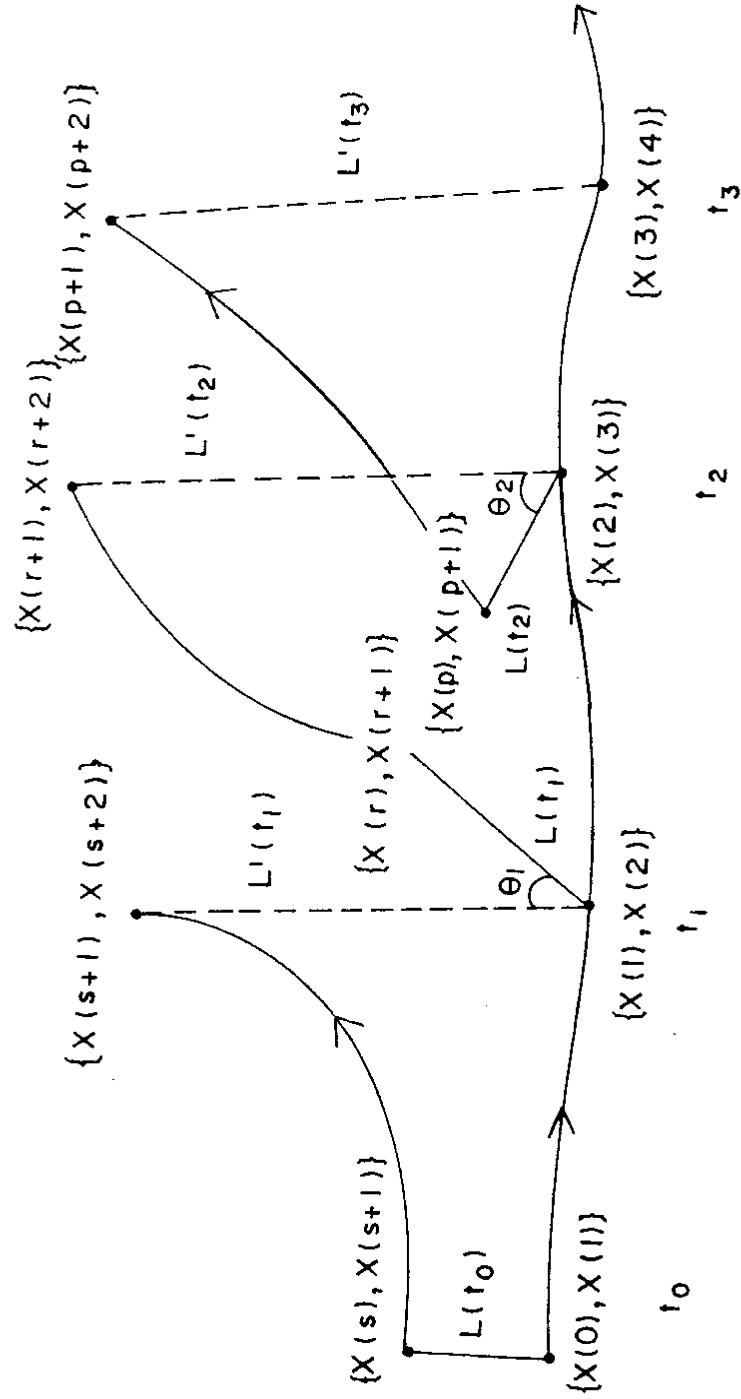
- Se localiza el vecino más cercano al punto inicial (en términos de la distancia euclídea) $\{X(t_0), X(t_0+\tau), \dots, X(t_0+(m-1)\tau)\}$ y se denota la distancia entre estos dos puntos por $L(t_0)$. En el tiempo t_1 , esta longitud inicial $L(t_0)$ habrá evolucionado a $L'(t_1)$.

En el Gráfico 9 el punto inicial es $\{X(0), X(1)\}$ y entre los puntos del atractor se busca el vecino más cercano $\{X(s), X(s+1)\}$. En el tiempo t_1 el punto inicial habrá evolucionado a $\{X(1), X(2)\}$ y $\{X(s), X(s+1)\}$ habrá evolucionado a $\{X(s+1), X(s+2)\}$.

- Se busca un nuevo punto entre los datos que satisfaga lo suficientemente bien los criterios de: 1) su separación $L(t_0)$ del punto fiducial evolucionado es pequeña, y 2) el ángulo entre los elementos fiducial y de reemplazo es pequeño.

Si las órbitas que iniciaron en $\{X(0), X(1)\}$ y en $\{X(s), X(s+1)\}$ en el tiempo t_1 continúan unidas, el punto que satisfaga los criterios anteriores será $\{X(s+1), X(s+2)\}$ y no se hace el reemplazo. Pero si $\{X(s+1), X(s+2)\}$ se aleja como ocurre en el Gráfico 9, se

Gráfico 9
 DINAMICA DEL CALCULO DEL EXPONENTE DE LYAPUNOV



busca otro punto del atractor (en el Gráfico 9 $\{X(r), X(r+1)\}$) que satisfaga los criterios anteriores y se hace el reemplazo.

- Se repite el proceso (por lo cual en el Gráfico 9 aparecen el siguiente punto fiducial evolucionado $\{X(2), X(3)\}$ y el punto más cercano a él $\{X(p), X(p+1)\}$) hasta que la trayectoria fiducial haya recorrido el archivo entero de datos, y en ese punto se estima

$$\Phi = 1/(t_M - t_0) \sum_{k=1}^M \log_2 [L'(t_k)/L(t_{k-1})] \quad (16)$$

donde M es el número total de pasos de reemplazo.

Nótese que si las órbitas vecinas iniciales siguieran unidas entonces $L'(t_k)/L(t_{k-1})=1$ y reemplazando en (16) daría $\Phi = 0$ lo que estaría indicando que la serie refleja una trayectoria superestable.

En el límite si se cuenta con una cantidad infinita de datos libres de ruido, el procedimiento garantiza vectores de reemplazo de magnitud infinitesimal sin error de orientación, y Φ se tiene por definición.

Para hacer un cálculo apropiado se necesitan suficientes datos que permitan aproximar las escalas de longitud apropiada. Si la dimensión del atractor escogido es m , es deseable tener una serie de alrededor de 30^m datos. En el caso de la serie del pompón se contaba con 690 datos, de modo que la dimensión del atractor reconstruido no podía ser mayor de 2, y aún así la serie no era de la longitud más deseable.

Aunque el programa es todavía bastante experimental y la escogencia de los parámetros iniciales afecta la estimación del exponente de Lyapunov, se puede decir que si este es cercano a cero el sistema presenta alguna clase de estabilidad o periodicidad, mientras que entre mayor sea el exponente más caótico es el sistema. Sin embargo cuando el exponente de Lyapunov estimado es muy grande es posible que la serie contenga más de ruido que de Caos.

Para la serie de las flores se corrió el programa en un computador personal con diversos valores de los parámetros iniciales obteniendo valores aproximados de $\Phi = 0.64$ lo cual indica que existe cierto tipo de divergencia orbital entre trayectorias vecinas y que por tanto la serie de precios del pompón puede provenir de un proceso caótico.

Esto implica que la serie de los precios del pompón podría modelarse por medio de métodos no lineales, con una metodología diferente a la utilizada por Camacho (1990). Sin embargo, este es un punto que queda abierto para futuras investigaciones cuando haya otras series largas a disposición.

El mismo programa fue corrido con la serie generada por la función logística para $a=4$ (caso iv), arrojando como resultado $\Phi=0.98$, corroborando la existencia de Caos en dicha trayectoria.

El problema de la detección del Caos radica en que se necesitan series de tiempo muy largas para reconstruir el atractor con varias dimensiones y hacer un experimento más completo que el que se realizó aquí. Además para que estas pruebas sean cuidadosas es necesario que los datos sean muy libres de ruido, ya que como se vio antes las trayectorias caóticas son extremadamente sensibles a cambios ligeros en las condiciones iniciales o en los parámetros, y en Economía es particularmente difícil tener tal precisión en los datos.

En el Gráfico 10 (extraída de Holden (1986)) se puede ver la variación en los exponentes de Lyapunov para la función logística como función del parámetro 'a' para valores de 'a' mayores a 3.4 que es donde se empieza a ver un comportamiento interesante, ya que para valores de 'a' menores el exponente de Lyapunov es negativo y como se vio antes no hay todavía posibilidad de Caos.

Se observa cómo el exponente de Lyapunov es positivo en el intervalo de 'a' en que la trayectoria que se genera es caótica. También se ve que a partir de $a = 3.57$ el exponente de Lyapunov es positivo para casi todos los 'a', o sea que con esos valores de 'a' se generan trayectorias caóticas.

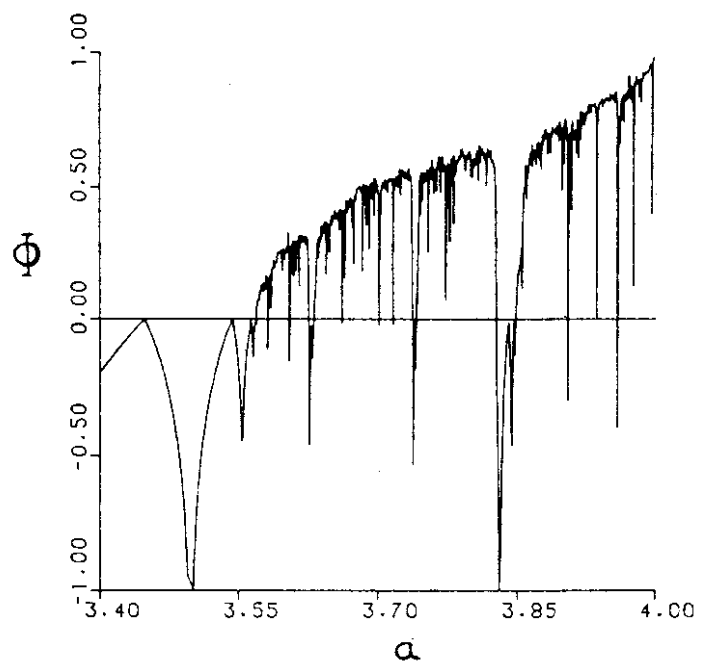
En el caso específico de la función de tienda

$$f(x) = \begin{cases} x/a & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ (1-x)/(1-a) & \text{si } a \leq x \leq 1 \end{cases}$$

el exponente de Lyapunov mide $\ln 2$.

Este resultado al igual que varias referencias sobre algoritmos usados para calcular el espectro de exponentes de Lyapunov en Ciencias Naturales o en Economía se pueden encontrar en Brock y Magliaris (1989).

Grafico 10
EXPONENTES DE LYAPUNOV



Bibliografía

- Ashley, R. y Patterson, D. (1989). "Linear versus nonlinear macroeconomies: A statistical test". *International Economic Review*, vol. 30 No. 3. 685-706.
- Baumol, W. y Benhabib, J. (1989). "Chaos: significance, mechanisms and economic applications". *Journal of Economic Perspectives*, vol. 3 No. 1. 77-105.
- Benhabib, J. y Day, R. (1981). "Rational choice and erratic behavior". *Review of Economic Studies*, 48. 459-472.
- Boldrin, M. y Montrucchio, L. (1986). "On the indeterminacy of capital accumulation paths". *Journal of Economic Theory*, 40. 26-39.
- Brock, W.A. (1986). "Distinguishing random and deterministic systems: Abridged version". *Journal of Economic Theory*, 40. 168-195.
- Brock, W.A. (1988). "Is the business cycle characterized by deterministic chaos?". *Journal of Monetary Economics*, 22. 71-90.
- Brock, W.A. y Magliaris, A.G. (1989). "Differential equations, stability and chaos in dynamic economics". North-Holland.
- Butler, Alison. (1990). "A methodological approach to chaos: Are economists missing the point?". *Review of the Federal Reserve Bank of St. Louis*.
- Camacho, Ana Patricia. (1990). *Proyección de Series de Tiempo: El Caso de los Precios de las Flores Colombianas Exportadas a Estados Unidos*. Artículo publicable de la Facultad de Economía de la Universidad de los Andes.
- Dana, R.A. y Montrucchio, L. (1986). "Dynamic complexity in duopoly games". *Journal of Economic Theory*, 40. 40-56.
- Day, R. y Shafer, W. (1985). "Keynesian chaos". *Journal of Macroeconomics*, 7. 227-295.
- Grandmont, J.M. (1985). "On endogenous competitive business cycles". *Econometrica*, vol. 53 No. 5. 995-1045.
- Grandmont y Malgrange. (1986). "Nonlinear economic dynamics: introduction". *Journal of Economic Theory*, 40. 3-12.
- Grandmont, J.M. (1986). "Stabilizing competitive business cycles". *Journal of Economic Theory*, 40. 57-76.
- Holden, A. (1986). *Chaos*. Princeton University Press. Princeton, New Jersey.
- May, R. (1976). "Simple mathematical models with very complicated dynamics". *Nature*, vol. 261. 459-467.
- Wolf, A., Swift, J., Swinney, H. y Vastano, J. (1985). "Determining Lyapunov exponents from a time series". *Physica*, 16D. 285-317.
- Wolf, A. (1991). *Lyapunovs Documentation for fet, a Program that Quantifies Chaos in a Time Series*. Department of Physics, The Cooper Union, New York.
- Wolf, A., Bessoir, T. (1991). "Diagnosing chaos in the space circle". *Physica*, D50. 239-258.